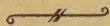


SUR
LE PROBLÈME DE M. GOURSAT
POUR
LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU SECOND ORDRE OU DE
L'ORDRE SUPÉRIEUR

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PAR

OLOF SJÖSTRAND



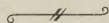
Thèse Uppsala

SUR
LE PROBLÈME DE M. GOURSAT
POUR
LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU SECOND ORDRE OU DE
L'ORDRE SUPÉRIEUR

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PAR

OLOF SJÖSTRAND



CETTE THÈSE EST PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES
SCIENCES D'UPSAL ET SERA PUBLIQUEMENT
SOUTENUE LE 1 FÉVRIER 1930, DÈS
10 HEURES DU MATIN DANS LA
SALLE DE »MATEMATISKA
SEMINARIET».



Introduction.

Le problème de M. GOURSAT pour une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique de l'ordre n à deux, trois ou plusieurs variables indépendantes consiste en la recherche de la solution qui prend des valeurs données sur n courbes, surfaces ou hypersurfaces qui se traversent entre elles.

Au *Chapitre I* l'équation est linéaire du second ordre à deux variables indépendantes. Pour les cas spéciaux par rapport à la situation des courbes aux limites qui n'ont pas été traités jusqu'ici, j'ai démontré l'existence de la solution cherchée, après quoi cette solution est exprimée par la méthode de RIEMANN. Les fonctions données sont supposées continues.

Au *Chapitre II* l'équation est de la forme la plus générale du second ordre à un nombre quelconque de variables indépendantes. Les hypersurfaces données sont de la forme la plus générale. Les fonctions données sont supposées analytiques.

Au *Chapitre III* l'équation, homogène aux coefficients constants, est de l'ordre quelconque à deux variables indépendantes. Les courbes aux limites sont des lignes droites qui se coupent en *un* point. Les fonctions données sont supposées analytiques.

Au *Chapitre IV* l'équation est linéaire du troisième ordre à deux variables indépendantes. Deux des courbes aux limites, qui toutes se rencontrent en *un* point, sont des caractéristiques. Les fonctions données sont supposées continues. Le cas le plus général quant à la situation des courbes entre elles est qu'elles se coupent en *trois* points.

C'est M. HOLMGREN qui m'a intéressé pour ces recherches. Ce m'est un agréable devoir de lui exprimer ma vive reconnaissance pour le précieux enseignement dont j'ai profité pendant plusieurs années.

Cette thèse a été insérée dans le volume publié à l'occasion du centième anniversaire de CHALMERSKA INSTITUTET. J'exprime au COMITÉ DE RÉDACTION ma profonde gratitude.

Je remercie aussi très vivement M. H. KIHLMAN et M. A. LANDIN qui ont bien voulu corriger le texte de ma thèse.

Göteborg, septembre 1929.

Olof Sjöstrand.

*
2037/4



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551518_0007

Chapitre I.

I. M. GOURSAT a trouvé la solution d'une équation hyperbolique aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, quand les valeurs de la solution sont données sur deux courbes se rencontrant à un point et situées dans le même angle des caractéristiques ayant pour sommet le point en question.¹⁾ M. HADAMARD a résolu le problème de M. GOURSAT pour une équation linéaire en se servant de la méthode de RIEMANN²⁾. Aucun de ces auteurs, cependant, ne permet que les courbes forment un point de rebroussement. Outre cela, les tangentes caractéristiques ne sont pas admises au point où les courbes se traversent³⁾. Or, ce sont ces cas non traités qui seront l'objet de nos recherches. Pour démontrer l'existence de la solution, nous allons suivre une méthode employée pour le cas ordinaire par M. HOLMGREN dans ses cours traitant du problème de M. GOURSAT (en 1919), et où il part des intégrales suivantes:⁴⁾

$$\int_{\mu(y)}^x \varphi(a) z(x, y, a, \lambda(a)) da; \quad \int_{\lambda(x)}^y \psi(\beta) z(x, y, \mu(\beta), \beta) d\beta,$$

où $x = \mu(y)$; $y = \lambda(x)$ est l'équation d'une courbe arbitraire, $z(x, y, \xi, \eta)$ la fonction de RIEMANN (solution de l'équation (1) par rapport à x et y), $\varphi(a)$, $\psi(\beta)$ des fonctions continues arbitraires. Il est facile de démontrer que ces intégrales satisfont à l'équation

$$(1) \quad F(z) = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} + a(x, y) \frac{\delta z}{\delta x} + b(x, y) \frac{\delta z}{\delta y} + c(x, y) z = 0.$$

Quant à la manière dont les courbes se rencontrent on peut distinguer entre trois cas principaux:

¹⁾ Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2^e série, t. VI, 1904. Quand l'une des courbes est située dans deux angles opposés des caractéristiques, l'autre dans les deux angles adjacents, le problème est traité par M. PICONE: Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XXI p. 133. Par sa méthode (des équations intégrales) M. PICONE se voit obligé d'introduire quelques conditions non nécessaires.

²⁾ Bulletin de la Société mathématique de France t. XXXII, 1904. Au cours de cette étude nous nous servons de la lettre H. pour désigner ce mémoire.

³⁾ Cf. GOURSAT I. c. p. 141, H. p. 263.

⁴⁾ LE ROUX est le premier à qui on doit des intégrales de ce type, appelées par lui des intégrales principales. Cf. Annales de l'Éc. norm. sup., série 3, T. 12 p. 239.

- A. Les courbes ont des tangentes différentes non-caractéristiques (cas ordinaire).
- B. Les courbes ont la même tangente, non-caractéristique.
- C. L'une des courbes (par ex. celle d'en haut) a une tangente caractéristique.

Tous les autres cas se transforment facilement en un de ceux-ci¹⁾. Nous allons donc démontrer l'existence d'une intégrale cherchée pour les cas B et C.

2. Nous considérons donc deux courbes AB et AC dans le même angle des caractéristiques. Que leurs équations soient

$$\begin{aligned} \text{(AC)} \quad & y = \lambda_1(x); \quad x = \mu_1(y); \\ \text{(AB)} \quad & y = \lambda_2(x); \quad x = \mu_2(y). \quad (\text{Cf. fig. 1}). \end{aligned}$$

Nous cherchons une solution de (1) qui se réduise sur AC à une fonction continue $f(x)$, et sur AB à une fonction continue $g(y)$. Pour qu'une telle solution soit possible, il faut que $f(o) = g(o)$. En outre, nous supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ puissent s'écrire sous la forme

$$(2) \quad \begin{aligned} f(x) &= f(o) + x^{\rho_1} f_1(x) \quad \left. \vphantom{f(x)} \right\} \rho_1 > 0 \\ g(y) &= g(o) + y^{\rho_2} g_1(y) \quad \left. \vphantom{g(y)} \right\} \rho_2 > 0, \end{aligned}$$

où $f_1(o)$, $f_1'(o)$, $g_1(o)$, $g_1'(o)$ ont des valeurs déterminées.

D'après M. HOLMGREN nous écrivons l'intégrale

$$(3) \quad Z(x, y) = f(o) z(x, y, o, o) + \int_{\mu_2(y)}^x \varphi(s) z(x, y, s, \lambda_2(s)) ds + \int_{\lambda_1(x)}^y \psi(t) z(x, y, \mu_1(t), t) dt.$$

Il faut déterminer φ et ψ de telle manière que l'intégrale (3) prenne sur BAC les valeurs données.

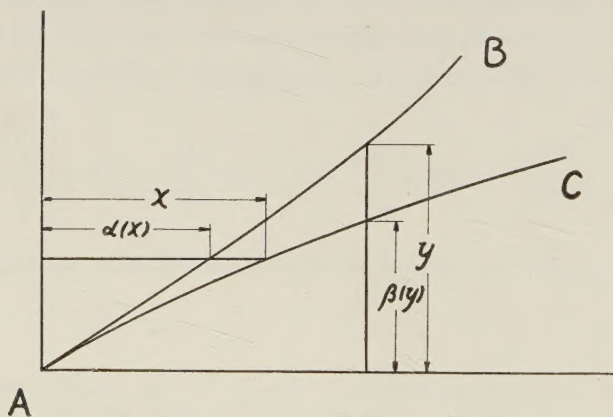


Fig. 1.

Pour $y = \lambda_1(x)$ on aura

$$(4') \quad f(x) = f(o) z(x, \lambda_1(x), o, o) + \int_{\alpha(x)}^x \varphi(s) z(x, \lambda_1(x), s, \lambda_2(s)) ds, \quad \text{où } \alpha(x) = \mu_2(\lambda_1(x)).$$

¹⁾ Cf. HOLMGREN, Arkiv för Matematik, t. XIV, 1920 p. 21.

pour $x = \mu_2(y)$

$$(4'') \quad g(y) = f(o) z(\mu_2(y), y, o, o) + \int_{\beta(y)}^y \psi(t) z(\mu_2(y), y, \mu_1(t), t) dt, \text{ où } \beta(y) = \lambda_1(\mu_2(y)).$$

Soit ρ le moindre des nombres ρ_1 et ρ_2 si l'un d'eux est inférieur à un, et dans les autres cas égal à un. Cela nous donne

$$(5') \quad f(x) - f(o) z(x, \lambda_1(x), o, o) = x^\rho \cdot F(x)$$

$$(5'') \quad g(y) - f(o) z(\mu_2(y), y, o, o) = y^\rho \cdot G(y); \quad o < \rho \leq 1,$$

où $F(o)$ et $G(o)$ ont des valeurs déterminées (dans le cas B aussi bien qu'en C).

3. Traitons d'abord le cas B et étudions la forme de $a(x)$. Parce que $a(x) = \mu_2(\lambda_1(x))$, on conclut que $a'(x) = \mu_2'(\lambda_1(x)) \cdot \lambda_1'(x)$, et par conséquent, on a $a'(o) = 1$. Posons donc

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} \alpha(x) &= x(1 - x^\Omega p(x)) \\ \beta(y) &= y(1 - y^\Omega q(y)) \end{aligned} \right\},$$

où Ω est un entier positif > 0 ; $p(o) > 0$; $q(o) > 0$ et $p'(o)$, $q'(o)$ ont des valeurs déterminées.¹⁾

On comprend que les deux équations (4) sont analogues. Considérons seulement l'équation (4'). Nous posons $z(x, \lambda_1(x), s, \lambda_2(s)) = H(x, s)$, d'où

$$(7) \quad \int_{a(x)}^x H(x, s) \varphi(s) ds = x^\rho F(x).$$

Nous trouvons

$$(x - a(x)) H(x, \xi) \varphi(\xi) = x^\rho F(x); \quad a(x) < \xi < x;$$

$$\varphi(\xi) = \frac{x^\rho F(x)}{x^{\Omega+1} p(x) H(x, \xi)}.$$

Puisque $\frac{F(x)}{p(x) H(x, \xi)} \rightarrow \frac{F(o)}{p(o)}$ pour $x \rightarrow o$, il est commode d'écrire

$$(8) \quad \varphi(x) = \frac{x^\rho \zeta(x)}{x^{1+\Omega}}.$$

Par suite

$$\int_{a(x)}^x H(x, s) \frac{s^\rho \zeta(s)}{s^{1+\Omega}} ds = x^\rho F(x).$$

Dérivons et multiplions par $\frac{x^{1+\Omega}}{H(x, x)}$

$$\begin{aligned} x^\rho \zeta(x) - \frac{H(x, a(x))}{H(x, x)} \cdot \left(\frac{x}{a(x)}\right)^{1+\Omega} a'(x) (a(x))^\rho \zeta(a(x)) &+ \int_{a(x)}^x \frac{H'_x(x, s)}{H(x, x)} \left(\frac{x}{s}\right)^{1+\Omega} s^\rho \zeta(s) ds = \\ &= x^{\Omega+\rho} \frac{\rho F(x) + x F'(x)}{H(x, x)}. \end{aligned}$$

¹⁾ Cf. HOLMGREN l. c. p. 16.

Posons

$$(9) \quad \begin{cases} x^\rho \zeta(x) = \xi(x), \\ \frac{H(x, a(x))}{H(x, x)} \left(\frac{x}{a(x)} \right)^{1+\Omega} a'(x) = \gamma(x), \\ \frac{H'_x(x, s)}{H(x, x)} \left(\frac{x}{s} \right)^{1+\Omega} = K(x, s), \\ \frac{\rho F(x) + x F'(x)}{H(x, x)} = L(x). \end{cases}$$

On comprend que $\gamma(x)$, $K(x, s)$ et $L(x)$ sont des fonctions bornées¹⁾, et on obtient

$$(10) \quad \xi(x) - \gamma(x) \xi(a(x)) + \int_{a(x)}^x K(x, s) \xi(s) ds = x^{\Omega+\rho} L(x).$$

4. Nous allons maintenant discuter la forme de $\gamma(x)$. On a, à cause du caractère de la fonction de RIEMANN, l'inégalité suivante:

$$\left| \frac{H(x, a(x))}{H(x, x)} \right| < 1 + M_1(x - a(x)),$$

dont on peut se convaincre aisément. On a en outre

$$\left(\frac{x}{a(x)} \right)^{1+\Omega} a'(x) = \frac{1 - (1 + \Omega) x^\Omega p(x) - x^{1+\Omega} p'(x)}{(1 - x^\Omega p(x))^{1+\Omega}} = \frac{1 - x^{1+\Omega} \frac{p'(x)}{1 - (1 + \Omega) x^\Omega p(x)}}{(1 - x^\Omega p(x))^{1+\Omega}}.$$

On conçoit qu'aux environs de $x = 0$

$$\frac{(1 - x^\Omega p(x))^{1+\Omega}}{1 - (1 + \Omega) x^\Omega p(x)} > 1,$$

d'où pour $x < x_I$

$$\left(\frac{x}{a(x)} \right)^{1+\Omega} a'(x) < 1 - x^{1+\Omega} \frac{p'(x)}{1 - (1 + \Omega) x^\Omega p(x)} = 1 - \frac{(x - a(x)) p'(x)}{p(x) (1 - (1 + \Omega) x^\Omega p(x))}.$$

Comme $\frac{p'(x)}{p(x) (1 - (1 + \Omega) x^\Omega p(x))} \rightarrow \frac{p'(0)}{p(0)}$ pour $x \rightarrow 0$,

on aura pour $x < x_{II} \leq x_I$ une inégalité de la forme

$$\left(\frac{x}{a(x)} \right)^{1+\Omega} a'(x) < 1 + M_2(x - a(x)),$$

et nous en tirons

$$(11) \quad |\gamma(x)| < 1 + M_2(x - a(x)).$$

¹⁾ On voit facilement que $z(x, y, s, t)$ et ses dérivées partielles par rapport à x, y, s, t sont bornées dans le domaine considéré. Cf. par exemple GOURSAT: Cours d'Analyse t. III § 494.

5. Pour obtenir une solution de l'équation (10) posons

$$(12') \quad \xi(x) = \xi_0(x) + \xi_1(x) + \dots + \xi_n(x) + \dots, \text{ où}$$

[illegible]

Posons en outre

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x) = x_1, \\ \alpha(x_1) = x_2 \\ \text{--- --- ---} \\ \alpha(x_{n-1}) = x_n \\ \text{--- --- ---} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \xi_0(x) = & x^{Q+\rho} L(x) + \gamma(x) x_1^{Q+\rho} L(x_1) + \gamma(x) \gamma(x_1) x_2^{Q+\rho} L(x_2) + \dots \\ & + \gamma(x) \dots \gamma(x_{n-1}) x_n^{Q+\rho} L(x_n) + \dots \end{aligned}$$

Cette série satisfait formellement à la première des équations (12''). On prouve facilement sa convergence uniforme dans l'intervalle regardé. Selon (11)

$$\prod_{n=0}^{\infty} \gamma(x_n) < \prod_{n=0}^{\infty} (1 + M_3(x_n - x_{n+1})) < e^{M_3 \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - x_{n+1})} = e^{M_3 x} < A.$$

Puisque

$$|L(x)| < B, \text{ on a}$$

$$|\xi_0(x)| < AB \sum_{i=0}^{\infty} x_i 2^{i+\rho}.$$

En outre,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i^{\Omega+\rho} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^{1+\Omega} x_i^{\rho-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i - x_{i+1}}{p(x_i)} x_i^{\rho-1} < \text{Const.} \int_0^x s^{\rho-1} ds < \text{Const.} \frac{x^{\rho}}{\rho}.$$

Pour toutes les valeurs de l'intervalle on a

$$|\xi_0(x)| < AC \frac{x^\rho}{\rho},$$

où A et C sont des constants. Nous avons donc obtenu une solution continue de la première des équations (12''). Passons à la seconde. Puisque

$$|K(x, s)| < D, \text{ on a}$$

$$\left| - \int_{a(x)}^x K(x, s) \xi_0(s) ds \right| < ACD \frac{x^\rho}{\rho} (x - a(x)).$$

De la même manière que pour $\xi_0(x)$ on aura

$$|\xi_1(x)| < A^2 C D \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)},$$

$$|\xi_2(x)| < A^3 C D^2 \frac{x^{\rho+2}}{\rho(\rho+1)(\rho+2)},$$

— — — — —

$$|\xi_n(x)| < A^{n+1} C D^n \frac{x^{\rho+n}}{\rho(\rho+1) \dots (\rho+n)},$$

— — — — —

Toutes ces fonctions sont continues et forment une série uniformément convergente à l'intérieur de l'intervalle considéré. (12') est donc une solution continue de (10), et nous avons pour $\xi(x)$ une inégalité de la forme

$$|\xi(x)| < M x^\rho,$$

d'où l'on tire selon (8), (9)

$$(14') \quad |\varphi(x)| < \frac{M x^\rho}{x^{1+\varrho}}.$$

L'équation (4''), traitée de la même manière, nous donne

$$(14'') \quad |\psi(y)| < \frac{M y^\rho}{y^{1+\varrho}}.$$

Après avoir trouvé $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ nous avons obtenu une intégrale de (1) de la forme (3), qui a les valeurs données sur ABC . Selon (3), (14') et (14'') on a

$$(15) \quad |Z(x, y) - Z_A| < M_1 x^\rho,$$

d'où l'on conclut que la solution $Z(x, y)$ est continue dans la région BAC et sur son contour.

6. Il est facile de démontrer que l'équation (7) n'a qu'une seule solution de la forme

$$(14') \quad \varphi(x) = \frac{\xi(x)}{x^{1+\varrho}} = \frac{x^\rho \zeta(x)}{x^{1+\varrho}}, \text{ où } \zeta(x) \text{ est une fonction continue pour } x \geq 0. \text{ Supposons}$$

qu'il y en ait plus d'une. Il existerait donc une fonction $\xi(x)$, continue pour $x \geq 0$, ayant $\xi(0) = 0$ et satisfaisant à l'équation

$$\xi(x) - \gamma(x) \xi(x_1) = - \int_{x_1}^x K(x, s) \xi(s) ds.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \xi(x_1) - \gamma(x_1) \xi(x_2) &= - \int_{x_2}^{x_1} K(x_1, s) \xi(s) ds, \\ \xi(x_{i-1}) - \gamma(x_{i-1}) \xi(x_i) &= - \int_{x_i}^{x_{i-1}} K(x_{i-1}, s) \xi(s) ds, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \xi(x) &= - \int_{x_1}^x K(x, s) \xi(s) ds - \gamma(x) \int_{x_2}^{x_1} K(x_1, s) \xi(s) ds - \dots \\ &- \gamma(x) \gamma(x_1) \dots \gamma(x_{i-2}) \int_{x_i}^{x_{i-1}} K(x_{i-1}, s) \xi(s) ds + \gamma(x) \gamma(x_1) \dots \gamma(x_{i-1}) \xi(x_i). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\xi(x) = - \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(x) \gamma(x_1) \dots \gamma(x_{i-1}) \int_{x_{i+1}}^{x_i} K(x_i, s) \xi(s) ds.$$

Puisque $|K(x, s)| < D$; $|\xi(x)| < E$; $\prod_{i=0}^{\infty} \gamma(x_i) < A$ pour $x < x_0$, on a

$$|\xi(x)| < ADE x,$$

et de la même manière

$$\begin{aligned} |\xi(x)| &< A^2 D^2 E \frac{x^2}{2}, \\ |\xi(x)| &< A^n D^n E \frac{x^n}{n}, \end{aligned}$$

Il faut que $\xi(x)$ soit nul identiquement.

7. Passons aux dérivées partielles de la solution (3). On a

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta y} &= f(o) \frac{\delta z(x, y, o, o)}{\delta y} + \int_{\mu_2(y)}^x \varphi(s) \frac{\delta z(x, y, s, \lambda_2(s))}{\delta y} ds + \int_{\lambda_1(x)}^y \psi(t) \frac{\delta z(x, y, \mu_1(t), t)}{\delta y} dt + \\ &+ \varphi(\mu_2(y)) \mu_2'(y) [1 - z(x, y, \mu_2(y), y)] + \psi(y) [z(x, y, \mu_1(y), y) - 1] + \\ &+ \psi(y) - \varphi(\mu_2(y)) \mu_2'(y). \end{aligned}$$

On trouve facilement que les cinq premiers termes sont continus pour $x \geq o$. Il s'agit d'étudier l'expression

$$\psi(y) - \varphi(\mu_2(y)) \mu_2'(y).$$

Dans l'équation (4') faisons le changement de variables $s = \mu_2(t)$

$$f(\mu_2(y)) = f(o) z(\mu_2(y), \beta(y), o, o) + \int_{\beta(y)}^y \varphi(\mu_2(t)) \mu_2'(t) z(\mu_2(y), \beta(y), \mu_2(t), t) dt.$$

Par addition de cette équation et de l'équation (4'') on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\beta(y)}^y [\psi(t) - \varphi(\mu_2(t)) \mu_2'(t)] z(\mu_2(y), y, \mu_1(t), t) dt &= g(y) - f(\mu_2(y)) + \\ &+ f(o) [z(\mu_2(y), \beta(y), o, o) - z(\mu_2(y), y, o, o)] + \\ &+ \int_{\beta(y)}^y \varphi(\mu_2(t)) \mu_2'(t) [z(\mu_2(y), \beta(y), \mu_2(t), t) - z(\mu_2(y), y, \mu_1(t), t)] dt. \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{z(\mu_2(y), \beta(y), o, o) - z(\mu_2(y), y, o, o)}{y - \beta(y)} = G_1(y). \quad [G_1(o) \neq o \text{ en général}]$$

Ici $G_1(y)$ est une fonction continue pour $y \geq o$. De même pour $G_2(y)$ dans l'expression

$$\frac{\int_{\beta(y)}^y \varphi(\mu_2(t)) \mu_2'(t) [\dots] dt}{(y - \beta(y)) y^\rho} = G_2(y)$$

à cause du caractère de la fonction de RIEMANN et l'inégalité (14'). En outre,

$$(16') \quad g(y) - f(\mu_2(y)) = y^{\mu_1} G_3(y).$$

Dans ce cas-ci $\mu_1 \geq \bar{\rho}$, où $\bar{\rho}$ est le moindre des nombres ρ_1 et ρ_2 ¹⁾ (Cf. (2)) et $G_3(y)$ est continue pour $y \geq o$. Puisque $\bar{\rho} \geq \rho$ (cf. (5)), on a

$$\mu_1 \geq \bar{\rho} \geq \rho.$$

Ainsi on obtient l'équation

$$\int_{\beta(y)}^y [\psi(t) - \varphi(\mu_2(t)) \mu_2'(t)] z(\mu_2(y), y, \mu_1(t), t) dt = y^{\lambda_1} G(y),$$

où $G(y)$ est continue pour $y \geq o$ et où $\lambda_1 = \mu_1$ si $\mu_1 < 1 + \Omega$ et $= 1 + \Omega$ dans les autres cas. D'après (14'') on obtient, puisque l'équation ci-dessus est tout à fait égale à (4''),

$$|\psi(y) - \varphi(\mu_2(y)) \mu_2'(y)| < M_1 \frac{y^{\lambda_1}}{y^{1+\Omega}}.$$

De cette inégalité à son tour on a

$$\left| \frac{\delta Z}{\delta y} \right| < K_1 \frac{y^{\lambda_1}}{y^{1+\Omega}}.$$

¹⁾ Il est évident que μ_1 peut être plus grand que $\bar{\rho}$. Soit $f(x) = f(o) + x + \lambda_1(x)$; $g(y) = f(o) + y + \mu_2(y)$. Ici $\rho_1 = \rho_2 = \bar{\rho} = 1$. On a $g(y) - f(\mu_2(y)) = y - \beta(y)$. μ_1 est par conséquent $= 1 + \Omega$. Pour que la solution cherchée obtienne une dérivée continue $\frac{\partial Z}{\partial y}$, il faut que $\mu_1 \geq 1 + \Omega$. (Voir la fin de ce §).

²⁾ Selon le § 6. on comprend immédiatement que la fonction ψ dont il s'agit ici est tout à fait la même que ψ de l'intégrale (3).

De même, si nous posons

$$(16'') \quad f(x) - g(\lambda_1(x)) = x^{\mu_2} F_3(x); \quad (\mu_2 \geq \bar{\rho} \geq \rho).$$

on obtient que

$$\left| \frac{\delta Z}{\delta x} \right| < K_2 \frac{x^{\lambda_2}}{x^{1+\varrho}}.$$

Si $\bar{\lambda}$ est le moindre des nombres λ_1 et λ_2 , on aura

$$(17) \quad \begin{aligned} \left| \frac{\delta Z}{\delta x} \right| &< K \frac{x^{\bar{\lambda}}}{x^{1+\varrho}}, \\ \left| \frac{\delta Z}{\delta y} \right| &< K \frac{y^{\bar{\lambda}}}{y^{1+\varrho}}. \end{aligned}$$

Dans ces inégalités $\bar{\lambda}$ est ou $= \Omega + 1 > \rho$, auquel cas la solution Z est régulière, ou $\bar{\lambda} \geq \bar{\rho} \geq \rho$. Nous voyons donc que dans ces inégalités $\bar{\lambda}$ peut être plus grand que ρ dans les inégalités du type (14), qu'on aurait pu obtenir immédiatement¹⁾. L'inégalité (17) dépend par conséquent essentiellement des exponents μ_1 et μ_2 dans les formules (16).

8. Passons à la considération du cas C. Nous choisissons le cas le plus difficile en ce qui concerne les données aux limites, à savoir que $\rho < 1$ (Cf. (5)). On obtient immédiatement l'équation (7), d'où l'on tire

$$(10') \quad \varphi(x) - \gamma(x) \varphi(a(x)) + \int_{a(x)}^x K(x, s) \varphi(s) ds = x^{\rho-1} L(x),$$

où

$$(9') \quad \begin{cases} \frac{H(x, a(x))}{H(x, x)} a'(x) = \gamma(x), \\ \frac{H'_x(x, s)}{H(x, x)} = K(x, s), \\ \frac{\rho F(x) + x F'(x)}{H(x, x)} = L(x). \end{cases}$$

Supposons que

$$\left. \begin{aligned} y = \lambda_1(x) &= \alpha x (1 + x f_1(x)) \\ x = \mu_2(y) &= \beta y^n (1 + y g_1(y)) \end{aligned} \right\} n > 1^2).$$

On a alors

$$(6') \quad \begin{cases} a(x) = \beta \alpha^n x^n (1 + x p(x)), \\ \beta(y) = \alpha \beta y^n (1 + y q(y)). \end{cases}$$

¹⁾ Soit $f(x) = g(y) = Z_A = f(\rho)$. On a $\rho = 1$. L'inégalité (14) nous donnerait $\left| \frac{\delta Z}{\delta x} \right|; \left| \frac{\delta Z}{\delta y} \right| < \frac{K}{x^\varrho}$,

tandis que (17) montre que Z est régulière.

²⁾ Cf. HOLMGREN l. c. p. 19.

Nous faisons, en cas de nécessité, une transformation de variables

$$x = k_1 x',$$

$$y = k_2 y',$$

laquelle ne change ni l'équation (1), ni les formules (5), ni l'équation (6') de sorte que

$$n \beta \alpha^n < 1,$$

$$n \alpha \beta < 1.$$

Nous avons en outre

$$\alpha' (x) = n \beta \alpha^n x^{n-1} (1 + x p_1 (x)).$$

Puisque

$$\frac{H(x, \alpha(x))}{H(x, x)} (1 + x p_1(x)) \rightarrow 1 \text{ pour } x \rightarrow 0, \text{ on a pour } x < x_0 \text{ que}$$

$$|\gamma(x)| < x^{n-1}.$$

Nous choisissons cet intervalle; de façon qu'on a de plus

$$\frac{x^n}{\kappa} < x_1 < x^n, \text{ où } \kappa > 1, \text{ dont}$$

$$\frac{x^{n^2}}{\kappa^{1+n}} < x_2 < x^{n^2},$$

-----,

$$\frac{x^{n^i}}{\frac{n^i-1}{\kappa^n-1}} < x_i < x^{n^i},$$

-----.

Me référant aux équations (12') et (12''), j'écris

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= x^{\rho-1} L(x) + \gamma(x) x_1^{\rho-1} L(x_1) + \gamma(x) \gamma(x_1) x_2^{\rho-1} L(x_2) + \dots \\ &\quad + \gamma(x) \dots \gamma(x_{i-1}) x_i^{\rho-1} L(x_i) + \dots \end{aligned}$$

Dans l'intervalle considéré $|L(x)| < M$, et par conséquent

$$|\varphi_0(x)| < M [x^{\rho-1} + x^{n-1} x_1^{\rho-1} + (x x_1)^{n-1} x_2^{\rho-1} + \dots + (x x_1 \dots x_{i-1})^{n-1} x_i^{\rho-1} + \dots].$$

Or $(x x_1 \dots x_{i-1})^{n-1} < x^{n^i-1}$. On a donc

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x)| &< M \left[x^{\rho-1} + x^{n-1} \left(\frac{\kappa}{x^n} \right)^{1-\rho} + x^{n^2-1} \left(\frac{\kappa^{1+n}}{x^{n^2}} \right)^{1-\rho} + \dots + x^{n^i-1} \left(\frac{\frac{n^i-1}{\kappa^n-1}}{x^{n^i}} \right)^{1-\rho} + \dots \right] = \\ &= M \left[x^{\rho-1} + \kappa^{1-\rho} x^{n\rho-1} + \kappa^{(1+n)(1-\rho)} x^{n^2\rho-1} + \dots + \kappa^{\frac{(n^i-1)(1-\rho)}{n-1}} x^{n^i\rho-1} + \dots \right] = \\ &= M x^{\rho-1} \left[1 + \kappa^{1-\rho} x^{(n-1)\rho} + \kappa^{(1+n)(1-\rho)} x^{(n^2-1)\rho} + \dots + \kappa^{\frac{(n^i-1)(1-\rho)}{n-1}} x^{(n^i-1)\rho} + \dots \right]. \end{aligned}$$

La série enfermée par [] est uniformément convergente pour $x < x_1 \leq x_0$. On a donc

$$|\varphi_0(x)| < M M_1 x^{\rho-1}.$$

Dans l'intervalle considéré $|K(x, s)| < M_2$, dont

$$\left| - \int_{a(x)}^x K(x, s) \varphi_0(s) ds \right| < M M_1 M_2 \frac{x^\rho}{\rho}.$$

Nous concluons

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x)| &< \frac{M M_1 M_2}{\rho} \left[x^\rho + x^{n-1} x^{n\rho} + x^{n^2-1} x^{n^2\rho} + \dots + x^{n^{i-1}-1} x^{n^{i-1}\rho} + \dots \right] = \\ &= \frac{M M_1 M_2}{\rho} x^\rho \left[1 + x^{(n-1)(1+\rho)} + x^{(n^2-1)(1+\rho)} + \dots + x^{(n^i-1)(1+\rho)} + \dots \right] < \frac{M M_1^2 M_2 x^\rho}{\rho}. \end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x)| &< \frac{M M_1^3 M_2^2 x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ |\varphi_i(x)| &< \frac{M M_1^{i+1} M_2^i x^{\rho+i-1}}{\rho(\rho+1) \dots (\rho+i-1)}. \end{aligned}$$

Il existe donc une solution de (10') $\varphi(x) = x^{\rho-1} \xi(x)$, où $\xi(x)$ est une fonction continue. Pour l'intégrale (3) on a

$$(15') \quad |Z(x, y) - Z_A| < K x^\rho + K_1 y^\rho.$$

9. Dans l'intention de traiter avec la méthode de RIEMANN la solution de l'équation (1) faite dans les paragraphes précédents, je me permets de présenter, d'après une nouvelle méthode, des inégalités analogues à celles obtenues par M. HADAMARD pour certaines fonctions auxiliaires¹⁾.

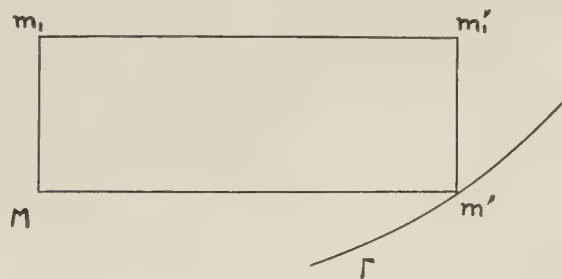


Fig. 2.

¹⁾ Cf. H. et HADAMARD: Bull. de la Soc. math. t. XXXI p. 208.

Soit v une solution de l'équation adjointe de (1) et z la fonction de RIEMANN (solution de (1) qui est $e^{-\int_{x_M}^x b(t, y_M) dt}$ sur $M m'$ (Cf. fig. 2) et $e^{-\int_{y_M}^y a(x_M, t) dt}$ sur $M m_1$). On a

$$\int_{M m' m'_1 m_1 M} (H d\eta - K d\xi) = 0,$$

où

$$H = a v z - z \frac{\partial v}{\partial \eta}; \quad K = b v z + v \frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

Ainsi

$$(18) \quad v_M = e^{-\int_M^{m_1} a d\eta} \cdot v_{m_1} + \int_{m_1}^{m'_1} v \left(b z + \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) d\xi + \int_{m'}^{m'_1} z \left(a v - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\eta.$$

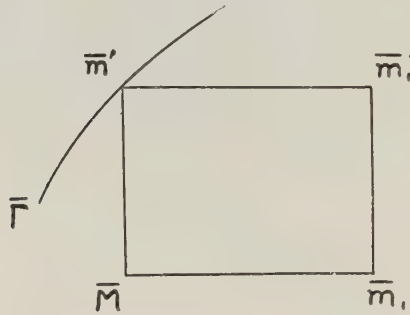


Fig. 3.

De la même manière, en posant

$$H = a v z + v \frac{\partial z}{\partial \eta}; \quad K = b v z - z \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

on aura selon la fig. 3

$$(18') \quad v_{\bar{M}} = e^{-\int_{\bar{M}}^{\bar{m}_1} b d\xi} v_{\bar{m}_1} + \int_{\bar{m}_1}^{\bar{m}'_1} v \left(a z + \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) d\eta + \int_{\bar{m}'}^{\bar{m}'_1} z \left(b v - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\xi.$$

10. Si a_A, b_A ne sont pas positifs tous les deux, nous faisons la transformation

$$z = (1 + a_1 x + b_1 y) z',$$

où

$$b_1 + a_A > 0; \quad a_1 + b_A > 0.$$

Celle-ci ne change pas les données aux limites²⁾.

¹⁾ GOURSAT, Cours d'Analyse, t. III §. 498.

²⁾ Nous observons cependant que la transformation comporte que ρ_1 et ρ_2 dans (2) sont bornés, de façon que $0 < \rho_1 \leq 1$; $0 < \rho_2 \leq 1$. Pour le cas B μ_1 et μ_2 dans (16) ne changent pas si $\mu_1 \leq \Omega + 1$; $\mu_2 \leq \Omega + 1$. D'autre part, si μ_1 et μ_2 sont $> \Omega + 1$, ils s'abaissent par la transformation à ce nombre.

Employons (18) en posant $\nu = \varphi_{2i+1}$ ²⁾. Supposons que $|\varphi_{2i+1}| \leq M_{2i+1}$ dans le domaine $A_{P_{2i}D}$, et que ce maximum du module existe en un point M à l'intérieur du domaine (et non sur la frontière $A_{P_{2i}D}$). Pour $i > i_1$ on a $a > K_1 > 0$. De plus,

On a par conséquent selon (18)

d'où l'on tire

$$1 - e^{-K_1 \eta} < K_2 \eta \xi.$$

Pour $i > i_{II} \geq i_I$ (c'est-à-dire quand $\eta < y_{P_{2,i}}$ est suffisamment petit)

$K_3 \eta < 1 - e^{-K_1 \eta}$, où $K_3 > 0$. Ainsi

$$K_3 \eta < K_2 \eta \xi, \text{ d'où}$$

$$K_3 < K_2 \xi < K_2 x_{P_2 i}.$$

¹) Cf. H. fig. 2.

2) H. §. 4.

³⁾ $b, \frac{\partial b}{\partial \nu}$ sont bornées (Condition indispensable pour l'emploi de la méthode de RIEMANN). De même pour

$z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, quelle que soit la position de M.

4) H. §. 4.

L'inégalité $K_3 < K_2 x_{P_{2i}}$ est absurde pour $i > i_{III} \geq i_{II}$. Il s'ensuit donc que, pour $i > i_{III}$, la supposition que M_{2i+1} existe en un point à l'intérieur du domaine $A P_{2i} D$, doit être fausse. Par conséquent, le maximum du module de φ_{2i+1} se trouve ou sur $P_{2i} A$, ou sur $P_{2i} D$. Il est évident que pour tous les M_{2i+1} qui sont situés sur une ligne $P_{2i} D$, ils sont bornés, quel que soit le nombre i^1). Si, au contraire, M_{2i+1} est situé sur $P_{2i} A$, on peut conclure que $M_{2i+1} < M_{2i}$ selon la façon dont on a formé les fonctions φ_i^2). Il s'ensuit clairement que les fonctions φ_i ont une limite supérieure³). Nous observons que cette démonstration est valable pour tous les trois cas A, B, C .

11. Transcrivons (18) de la façon suivante:

$$v_{m_1} - v_M = v_{m_1} (1 - z_{m_1}) - \int_{m_1}^{m'_1} v \left(bz + \frac{\delta z}{\delta \xi} \right) d\xi - \int_{m'}^{m'_1} z \left(av - \frac{\delta v}{\delta \eta} \right) d\eta.$$

Divisons les deux membres de l'équation par $\overline{m_1 M}$. Lorsque $\overline{m_1 M}$ tend vers zéro, on aura

$$(19) \quad \left(\frac{\delta v}{\delta y} \right)_M = (av)_M + \left[z \left(\frac{\delta v}{\delta y} - av \right) \right]_{m'}^{m'_1} - \int_{\bar{M}}^{m'} v \left(\frac{\delta (bz)}{\delta y} + \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} \right) dx.$$

De la même manière, en partant de (18') suivant la fig. 3,

$$(19') \quad \left(\frac{\delta v}{\delta x} \right)_{\bar{M}} = (bv)_{\bar{M}} + \left[z \left(\frac{\delta v}{\delta x} - bv \right) \right]_{\bar{m}'}^{\bar{m}'_1} - \int_{\bar{M}}^{\bar{m}'} v \left(\frac{\delta (az)}{\delta x} + \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} \right) dy.$$

Si dans (19) on pose $v = \varphi_{2i+1}$, on aura selon la fig. 5

$$\left(\frac{\delta \varphi_{2i+1}}{\delta y} \right)_M = (a \varphi_{2i+1})_M - \int_{\bar{M}}^{m'} \varphi_{2i+1} \left(\frac{\delta (bz)}{\delta y} + \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} \right) dx.$$

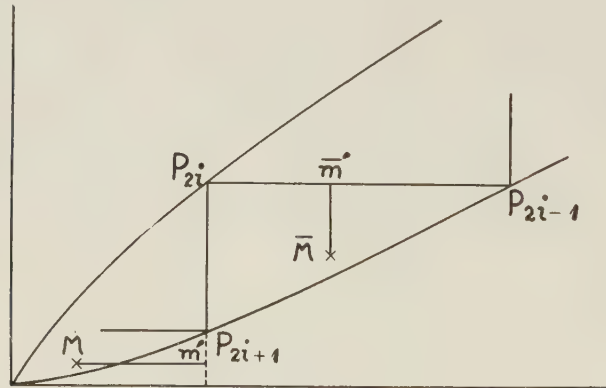


Fig. 5.

¹) H. §. 10.

²) H. §. 4.

³) Le même procédé, appliqué en ce qui concerne φ_{2i+1} à l'aide de (18), peut être appliqué à φ_{2i} à l'aide de (18').

Également, si dans (19') on pose $v = \varphi_{2i}$,

$$\left(\frac{\delta \varphi_{2i}}{\delta x}\right)_{\bar{M}} = (b\varphi_{2i})_{\bar{M}} - \int_{\bar{M}}^{\bar{m}'} \varphi_{2i} \left(\frac{\delta (az)}{\delta x} + \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} \right) dy.$$

Puisque les fonctions φ_i sont bornées, il s'ensuit des dernières formules que les dérivées parallèles¹⁾ sont également bornées dans tous les trois cas A, B et C.

12. Les formules (19) peuvent se transcrire de la façon suivante:

$$(20) \quad \left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)_M = (av)_M + \left[z \left(\frac{dv}{dy} - \frac{\delta v}{\delta x} \frac{dx}{dy} - av \right) \right]_{m'} - \int_{\bar{M}}^{m'} v \left(\frac{\delta (bz)}{\delta y} + \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} \right) dx.$$

Ici $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dx}{dy}$ sont prises le long de la courbe I' (Cf. fig. 2). De la même manière,

on obtient

$$(20') \quad \left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)_{\bar{M}} = (bv)_{\bar{M}} + \left[z \left(\frac{dv}{dx} - \frac{\delta v}{\delta y} \frac{dy}{dx} - bv \right) \right]_{\bar{m}'} - \int_{\bar{M}}^{\bar{m}'} v \left(\frac{\delta (az)}{\delta x} + \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} \right) dy,$$

où $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ sont prises le long de la courbe $\bar{I}'$. (Cf. fig. 3). Soit P'_{2i} un point quelconque dans le domaine d'existence de φ_{2i} . D'après (20) on obtient (Cf. fig. 6)

$$\left(\frac{\delta \varphi_{2i}}{\delta y}\right)_{P'_{2i}} = e^{-\int_{P'_{2i}}^{P'_{2i-1}} b d\xi} \left(\frac{d\varphi_{2i}}{dy}\right)_{P'_{2i-1}} + (k_1),$$

où (k_1) est une quantité bornée pour tous les i quelle que soit la position de P'_{2i} dans le domaine (on observe que $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{P'_{2i-1}}$ est bornée pour tous les i soit qu'il s'agisse des cas

A, B ou C). Or, selon la façon dont on a formé les φ_i , on a

$$\left(\frac{d\varphi_{2i}}{dy}\right)_{P'_{2i-1}} = \left(\frac{d\varphi_{2i-1}}{dy}\right)_{P'_{2i-1}} = \left(\frac{\delta \varphi_{2i-1}}{\delta x}\right)_{P'_{2i-1}} \left(\frac{dx}{dy}\right)_{P'_{2i-1}} + \left(\frac{\delta \varphi_{2i-1}}{\delta y}\right)_{P'_{2i-1}}.$$

Il s'ensuit que

$$\left(\frac{\delta \varphi_{2i}}{\delta y}\right)_{P'_{2i}} = e^{-\int_{P'_{2i}}^{P'_{2i-1}} b d\xi} \left(\frac{dx}{dy}\right)_{P'_{2i-1}} \left(\frac{\delta \varphi_{2i-1}}{\delta x}\right)_{P'_{2i-1}} + (k_2),$$

¹⁾ H. §. 13.

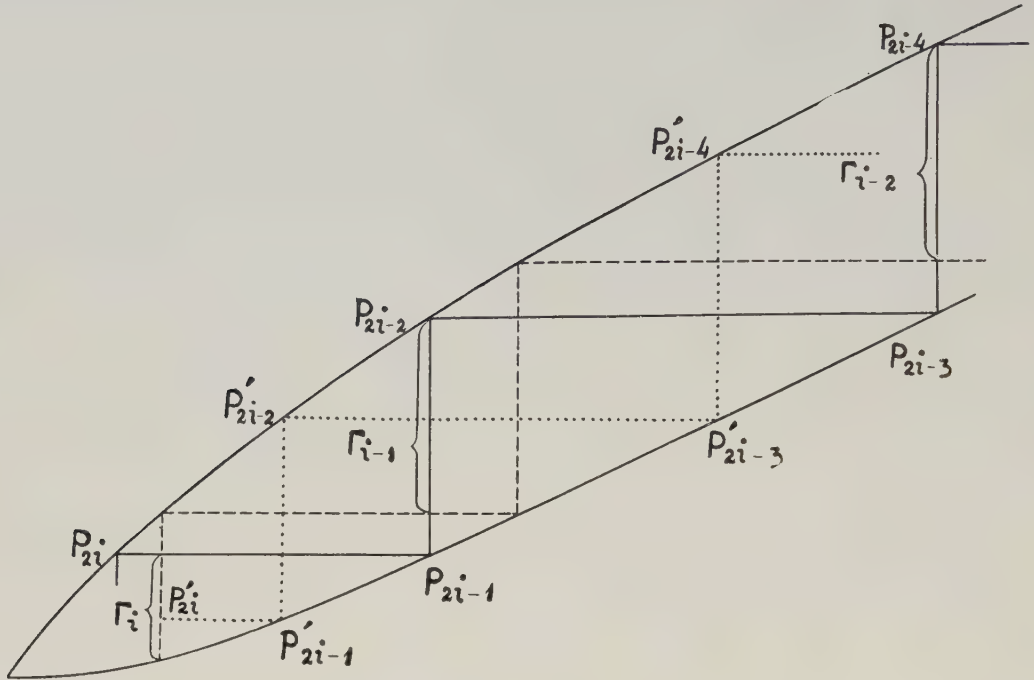


Fig. 6.

où (k_2) est du même caractère que (k_1) . D'après (20') on aura

$$\left(\frac{\delta \varphi_{2i-1}}{\delta x} \right)_{P'_{2i-1}} = e^{-\int_{P'_{2i-1}}^{P'_{2i-2}} a \, d\eta} \left[\left(\frac{d\varphi_{2i-1}}{dx} \right)_{P'_{2i-2}} + (k_3) \left(\frac{dy}{dx} \right)_{P'_{2i-2}} \right] + (k_4).$$

Observons que $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{P'_{2i-2}}$ est du caractère (k_1) dans les cas A et B , mais non dans le cas C . Nous obtenons donc

$$\left(\frac{\delta \varphi_{2i}}{\delta y} \right)_{P'_{2i}} = e^{-\int_{P'_{2i}}^{P'_{2i-2}} \left(\frac{dx}{dy} \right)_{P'_{2i-1}} \left[\left(\frac{d\varphi_{2i-1}}{dx} \right)_{P'_{2i-2}} + (k_3) \left(\frac{dy}{dx} \right)_{P'_{2i-2}} \right]} + (k_5).$$

Puisque

$$\left(\frac{d\varphi_{2i-1}}{dx} \right)_{P'_{2i-2}} = \left(\frac{d\varphi_{2i-2}}{dx} \right)_{P'_{2i-2}} = \left(\frac{\delta \varphi_{2i-2}}{\delta y} \right)_{P'_{2i-2}} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{P'_{2i-2}} + \left(\frac{\delta \varphi_{2i-2}}{\delta x} \right)_{P'_{2i-2}},$$

on aura

$$\left(\frac{\delta \varphi_{2i}}{\delta y} \right)_{P'_{2i}} = e^{-\int_{P'_{2i}}^{P'_{2i-2}} \left(\frac{dx}{dy} \right)_{P'_{2i-1}} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{P'_{2i-2}} \left[\left(\frac{\delta \varphi_{2i-2}}{\delta y} \right)_{P'_{2i-2}} + \frac{(k_6)}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{P'_{2i-2}}} + (k_3) \right]} + (k_5).$$

Il est évident que

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{P'_{2i-1}} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P'_{2i-2}} = \frac{dy_{P'_{2i-2}}}{dy_{P'_{2i}}},$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\delta\varphi_{2i}}{\delta y}\right)_{P'_{2i}} = e^{-\int_{P'_{2i}}^{P'_{2i-2}} \frac{dy_{P'_{2i-2}}}{dy_{P'_{2i}}}} \left[\left(\frac{\delta\varphi_{2i-2}}{\delta y}\right)_{P'_{2i-2}} + \frac{(k_6)}{\left(\frac{dx}{dy}\right)_{P'_{2i-2}}} + (k_3) + \frac{(k_5)}{e^{-\int}} \frac{dy_{P'_{2i}}}{dy_{P'_{2i-2}}} \right].$$

Mais

$$\frac{(k_6)}{\left(\frac{dx}{dy}\right)_{P'_{2i-2}}} + (k_3) + \frac{(k_5)}{e^{-\int}} \frac{dy_{P'_{2i}}}{dy_{P'_{2i-2}}} = (k)$$

dans tous les trois cas. On a donc

$$\left(\frac{\delta\varphi_{2i}}{\delta y}\right)_{P'_{2i}} = e^{-\int_{P'_{2i}}^{P'_{2i-2}} \frac{dy_{P'_{2i-2}}}{dy_{P'_{2i}}}} \left[\left(\frac{\delta\varphi_{2i-2}}{\delta y}\right)_{P'_{2i-2}} + (k) \right].$$

De la même façon on a

$$\left(\frac{\delta\varphi_{2i-2}}{\delta y}\right)_{P'_{2i-2}} = e^{-\int_{P'_{2i-2}}^{P'_{2i-4}} \frac{dy_{P'_{2i-4}}}{dy_{P'_{2i-2}}}} \left[\left(\frac{\delta\varphi_{2i-4}}{\delta y}\right)_{P'_{2i-4}} + (k) \right],$$

$$\left(\frac{\delta\varphi_2}{\delta y}\right)_{P'_2} = e^{-\int_{P'_2}^{P'} \frac{dy_{P'}}{dy_{P'_2}}} \left[\left(\frac{\delta\varphi_0}{\delta y}\right)_{P'} + (k) \right].$$

On conclut immédiatement que

$$\left| \left(\frac{\delta\varphi_{2i}}{\delta y}\right)_{P'_{2i}} \right| < K \left[\frac{dy_{P'_{2i-2}}}{dy_{P'_{2i}}} + \frac{dy_{P'_{2i-4}}}{dy_{P'_{2i}}} + \dots + \frac{dy_{P'}}{dy_{P'_{2i}}} \right]$$

où K est un nombre fixe indépendant de i et de la position de P'_{2i} dans le domaine d'existence de φ_{2i} . De la même façon

$$\left| \left(\frac{\delta\varphi_{2i-2}}{\delta y}\right)_{P'_{2i}} \right| < K \left[\frac{dy_{P'_{2i-2}}}{dy_{P'_{2i}}} + \dots + \frac{dy_{P'_2}}{dy_{P'_{2i}}} \right],$$

$$\left| \left(\frac{\delta\varphi_2}{\delta y}\right)_{P'_{2i}} \right| < K \frac{dy_{P'_{2i-2}}}{dy_{P'_{2i}}}.$$

Considérons un segment parallèle à l'axe des y à l'intérieur du domaine d'existence de la fonction φ_{2i} . On obtient selon l'équation ci-dessus (cf. fig. 6):

$$\left| \int_{\Gamma_i} d\varphi_{2i} \right| \leq \int_{\Gamma_i} \left| \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial \eta} \right| d\eta < K (\Gamma_{i-1} + \Gamma_{i-2} + \dots + \Gamma_0) < K (y - y_i) < Ky,$$

où l'on a posé $y_P = y; \dots; y_{P_{2i}} = y_i$. De la même manière:

$$\left| \int_{\Gamma_i} d\varphi_{2i-2} \right| < K y_1,$$

— — — — —,

$$\left| \int_{\Gamma_i} d\varphi_2 \right| < K y_{i-1}.$$

Posons maintenant

$$\Phi''_i = \varphi_2 + \varphi_4 + \dots + \varphi_{2i}^{(1)},$$

d'où l'on tire

$$\left| \int_{\Gamma_i} d\Phi''_i \right| < K (y + y_1 + y_2 + \dots + y_{i-1}).$$

13. Pour les cas A et C on comprend que la série $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ est convergente, et que par conséquent $\left| \int_{\Gamma_i} d\Phi''_i \right|$ a une limite supérieure indépendante de i . Ceci n'est pas valable pour le cas B, où l'on a

$$\begin{aligned} y + y_1 + \dots + y_{i-1} &= \frac{y^{1+\Omega}}{y^\Omega} + \frac{y_1^{1+\Omega}}{y_1^\Omega} + \dots + \frac{y_{i-1}^{1+\Omega}}{y_{i-1}^\Omega} = \\ &= \frac{y - y_1}{q(y) y^\Omega} + \frac{y_1 - y_2}{q(y_1) y_1^\Omega} + \dots + \frac{y_{i-1} - y_i}{q(y_{i-1}) y_{i-1}^\Omega} < M_1 \int_{y_i}^y \frac{d\eta}{\eta^\Omega} \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\Omega = 1$,

$$(21') \quad \left| \int_{\Gamma_i} d\Phi''_i \right| < K_1 (-\log y_i)$$

et si $\Omega > 1$,

$$(21'') \quad \left| \int_{\Gamma_i} d\Phi''_i \right| < \frac{K_2}{y_i^{\Omega-1}}.$$

14. Passons maintenant à la limite d'après la méthode de M. HADAMARD³⁾. Nous avons (cf. fig. 7.)

¹⁾ H. §§. 4, 16.

²⁾ Cf. (6).

³⁾ H. §. 14.

$$z_0 = \sum_{h=0}^{2i-1} (i\varphi_h z)_{P_h} + \sum_{h'=0}^{2k} (w_{h'} z)_{Q_{h'}} + \frac{1}{2} \int_{\beta}^P z \frac{dU}{dv} ds - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{dv} ds +$$

$$+ \frac{1}{2} (-1)^{2i-1} (\varphi_{2i} z)_I + \frac{1}{2} (-1)^{2k} (\psi_{2k+1} z)_K + \int_{\gamma}^{\beta} \left\{ a U z d\eta + \frac{1}{2} \left[U dz - z dU \right] \right\}^{(1)}.$$

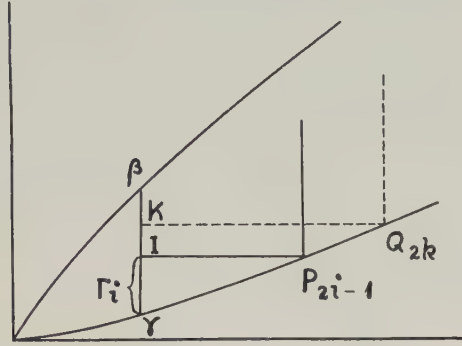


Fig. 7.

On obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\beta} U dz = \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\beta} d(Uz) - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\beta} z dU = \frac{1}{2} (-1)^{2i-1} (\varphi_{2i} z)_I +$$

$$+ \frac{1}{2} (-1)^{2k} (\psi_{2k+1} z)_K - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\beta} z dU.$$

Les termes qui doivent tendre vers zéro sont

$$(-1)^{2i-1} (\varphi_{2i} z)_I + (-1)^{2k} (\psi_{2k+1} z)_K + \int_{\gamma}^{\beta} [a U z d\eta - z dU].$$

Puisque U croît au plus comme l'indice i , on comprend sans difficulté que pour les cas A et C

$$\int_{\gamma}^{\beta} a U z d\eta \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty.$$

On trouve facilement qu'il en est ainsi aussi dans le cas B . Le segment $\beta\gamma$ est de la même grandeur que y_i^{1+Q} . D'après un théorème de LÉMERAY²⁾, on a en outre que

$$i y_i^Q \rightarrow \frac{1}{\Omega q(0)} \text{ quand } i \rightarrow \infty^3).$$

¹⁾ H. § 4, 5 et fig. 2.

²⁾ Bulletin de la Société mathématique de France t. 23 p. 255. D'une façon plus directe que celle de LÉMERAY on peut démontrer que l'expression $i y_i^Q$ est bornée.

³⁾ Cf. (6).

En passant à la limite, il nous reste donc à regarder l'expression

$$(-1)^{2i-1} (\varphi_{2i} z)_I + (-1)^{2k} (\psi_{2k+1} z)_K - \int_{\gamma}^{\beta} z dU.$$

Nous posons dans l'intégrale $z = z - z_A + z_A$, et considérons d'abord

$$\begin{aligned} & (-1)^{2i-1} (\varphi_{2i} z)_I + (-1)^{2k} (\psi_{2k+1} z)_K - z_A \int_{\gamma}^{\beta} dU = \\ & = (-1)^{2i-1} [\varphi_{2i} (z - z_A)]_I + (-1)^{2k} [\psi_{2k+1} (z - z_A)]_K. \end{aligned}$$

Cette expression tend vers zéro quand $i \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Il reste par conséquent de faire disparaître le terme

$$- \int_{\gamma}^{\beta} (z - z_A) dU.$$

Puisque

$$U = u + \Phi' - \Phi'' + \psi' - \psi''^1),$$

il suffit de considérer

$$\int_{\Gamma_i} (z - z_A) d\Phi''_i.$$

Pour les cas A et C $\int_{\Gamma_i} \left| \frac{\delta \Phi''_i}{\delta \eta} \right| d\eta$ est bornée, et par conséquent

$$\int_{\Gamma_i} (z - z_A) d\Phi''_i \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \infty,$$

et d'après cela le passage à la limite a eu lieu pour ces deux cas. Pour le cas B la chose n'est pas aussi simple. Selon (15) sur Γ_i on a

$$|z - z_A| < M_2 y_i^{\rho}. \quad (\rho \leq 1).$$

S'appuyant sur (21'), on obtient, si $\Omega = 1$, que

$$\left| \int_{\Gamma_i} (z - z_A) d\Phi''_i \right| < M_2 y_i^{\rho} \cdot K_1 (-\log y_i) \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \infty.$$

Si $\Omega > 1$, on ne peut pas réaliser le passage à la limite de cette façon. Posons dans ce cas $z = z - z_{\gamma} + z_{\gamma}$, après quoi il faut regarder

$$\int_{\Gamma_i} (z - z_{\gamma}) d\Phi''.$$

D'après le §. 7 en observant que $\mu_1 \leq \Omega + 1^2)$, on a sur Γ_i que

$$|z - z_{\gamma}| < K_2 y_i^{\mu_1}.$$

Anisi

$$\int_{\Gamma_i} (z - z_{\gamma}) d\Phi''_i \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \infty, \text{ si } \mu_1 > \Omega - 1.$$

¹⁾ H. §. 16.

²⁾ Cf. la remarque 2) à la p. 16.

Nous pouvons donc passer à la limite selon M. HADAMARD à la seule condition que le nombre μ_1 dans (16') soit plus grand que $\Omega - 1$ (ce qui se trouve toujours rempli pour $\Omega = 1$). Cette condition qui est d'une allure très générale et qui ne comporte pas l'exigence de continuité chez les dérivées de la solution¹⁾, est pourtant très restrictive²⁾ si les données aux limites sont de la forme (2).

Nous sommes donc arrivés à la solution (22) de M. HADAMARD pour les trois cas B (avec la restriction faite ci-dessus)³⁾, A et C

$$(22) \quad z_0 = \lim_{i, k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{h=0}^i (-1)^{h+1} (\varphi_h z)_{P_h} + \sum_{h'=0}^k (-1)^{h'+1} (\psi_{h'} z)_{Q_{h'}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\beta}^P z \frac{dU}{dv} ds - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{dv} ds \right\}.$$

Pour les cas A et C on peut, selon M. HADAMARD⁴⁾, immédiatement transformer cette solution à une forme dont tous les termes ont un sens. Pour le cas B ces termes ne sont pas convergents. Il faut procéder autrement.

15. Maintenant se pose la question comment pour le cas B on pourra se délivrer de la condition $\mu_1 > \Omega - 1$. Nous posons

$$(23) \quad z = \bar{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n'=0}^{\infty} z_{n'},$$

où $\bar{z}$ est la solution de (1), qui est toujours $f(o)$ sur BAC; z_n celle qui est $f(x_n) - f(x_{n+1})$ sur AC et nulle sur AB; $z_{n'}$ celle qui est $g(y_n) - g(y_{n+1})$ sur AB et nulle sur AC. Toutes ces solutions existent et s'obtiennent sous la forme (22), parce que λ_1 pour $\bar{z}$ est $\Omega + 1$, et μ_1 pour z_n et $z_{n'}$ est $\Omega + \rho_1$ et $\Omega + \rho_2$ respectivement, où ρ_1 et $\rho_2 \leq 1$ ⁵⁾. Car on a sous les suppositions (2) et (13)

$$f(x) - f(x_1) = x^{\Omega + \rho_1} \Phi(x),$$

où $\Phi(x)$ est une fonction continue pour $x \geq 0$.

Maintenant il s'agit de rechercher si la série (23) est convergente. Nous savons⁶⁾ que

¹⁾ Au contraire, le passage à la limite réussit toujours quand les dérivées sont continues (cf. la remarque 1) à la p. 12).

²⁾ Elle n'est pas remplie si $f(x) = f(o) - x$; $g(y) = g(o) + y$ et $\Omega \geq 2$, car on aura $g(y) - f(\mu_2(y)) = y + \mu_2(y) = y G_3(y)$; $f(x) - g(\lambda_1(x)) = -x - \lambda_1(x) = x F_3(x)$. Le passage à la limite n'est pas toujours réalisable même sous la supposition que $f(x)$ et $g(y)$ soient données de telle façon que $\frac{dz}{ds}$ a une seule valeur finie dans la direction commune des tangentes à l'origine (condition moins restrictive que (2)).

³⁾ Bien entendu, on peut passer à la limite sans se servir des formules (21). Dans ce cas il s'agit de démontrer que $\int_{\gamma}^{\beta} U dz \rightarrow 0$, ce qui réussit si $\mu_1 > \Omega$.

⁴⁾ H. (22').

⁵⁾ Cf. la remarque 2) à la p. 16.

⁶⁾ Cf. §. 2.

$$z_n(x, y) = \int_{\mu_2(y)}^x \varphi(s) z(x, y, s, \lambda_2(s)) ds,$$

où $\varphi(s)$ est la solution de l'équation

$$\int_{a(x)}^x H(x, s) \varphi(s) ds = x_n^{\Omega + \rho_1} \Phi(x_n).$$

Pour la résoudre nous posons $\varphi(x) = \frac{\xi(x)}{x^{1+\Omega}}$, d'où l'on obtient de la même façon qu'au § 3

$$\xi(x) - \gamma(x) \xi(a(x)) + \int_{a(x)}^x K(x, s) \xi(s) ds = x_n^{2\Omega + \rho_1} L_n(x),$$

où $\gamma(x)$ et $K(x, s)$ ont la même signification que dans (10) et

$$L_n(x) = \left(\frac{x}{x_n}\right)^{1+\Omega} \cdot \frac{dx_n}{dx} \cdot \frac{(\Omega + \rho_1) \Phi(x_n) + x_n \Phi'(x_n)}{H(x, x)}.$$

Si $f_1(x)^{1)}$ a une seconde dérivée²⁾, continue pour $x \geq 0$, $x \Phi'(x)$ est aussi continue pour $x \geq 0$. Il en ressort que

$$\frac{(\Omega + \rho_1) \Phi(x_n) + x_n \Phi'(x_n)}{H(x, x)}$$

a une limite supérieure, indépendante de n quand $x < x_I$. Puisque

$$\left(\frac{x}{x_n}\right)^{1+\Omega} \frac{dx_n}{dx} = \left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+\Omega} \frac{dx_1}{dx} \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1+\Omega} \frac{dx_2}{dx_1} \cdots \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{1+\Omega} \frac{dx_n}{dx_{n-1}},$$

on a selon le §. 4 que pour $x < x_{II} \leq x_I$

$$\left(\frac{x}{x_n}\right)^{1+\Omega} \frac{dx_n}{dx} < A_1,$$

dont il s'ensuit à son tour que pour $x < x_{II}$

$$|L_n(x)| < B_1,$$

quelle que soit la valeur de n .

En nous servant de (12') et (12''), nous obtenons, de la même manière qu'au §. 5, que

$$|\xi_0(x)| < A C_1 x_n^{\Omega + \rho_1},$$

et en outre que

$$|\xi_1(x)| < A^2 C_1 D x_n^{\Omega + \rho_1} x,$$

$$|\xi_2(x)| < A^3 C_1 D^2 x_n^{\Omega + \rho_1} \frac{x^2}{2},$$

$$\dots \dots \dots$$

¹⁾ Cf. §. 2.

²⁾ Il suffit d'ailleurs que $\frac{f'_1(x) - f'_1(x_1)}{x^{\Omega-1}}$ soit continue pour $x \geq 0$.

$$\left| \xi_i(x) \right| < A^{i+1} C_1 D^i x_n^{\Omega + \rho_1} \frac{x^i}{\underline{L}^i},$$

— — — — —

d'où l'on tire

$$\left| \varphi(x) \right| < \frac{M_2 x_n^{\Omega + \rho_1}}{x^{1+\Omega}}$$

et

$$\left| z_n(x, y) \right| < M_3 x_n^{\Omega + \rho_1}.$$

De la même façon on obtient

$$\left| z_{n'}(x, y) \right| < M_4 y_n^{\Omega + \rho_2},$$

où M_3 et M_4 sont des constants, indépendants de n , à l'intérieur de l'intervalle considéré. Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ et $\sum_{n'=0}^{\infty} z_{n'}$ sont uniformément convergentes dans ABC , et par conséquent, z dans (23) est une fonction continue de x et y qui remplit les conditions aux limites. On comprend facilement que z est réellement une solution de (1). Car on a dans l'intervalle considéré les inégalités

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| < M_5 \frac{x_n^{\Omega + \rho_1}}{x^{1+\Omega}},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < M_6 \frac{y_n^{\Omega + \rho_2}}{x^{1+\Omega}},$$

et de semblables inégalités s'obtiennent pour $\left| \frac{\partial z_{n'}}{\partial x} \right|$ et pour $\left| \frac{\partial z_{n'}}{\partial y} \right|$. Si $x_{III} < x < x_{II}$, où x_{III} peut être un nombre aussi petit qu'on le veuille, les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial z_n}{\partial x}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial z_n}{\partial y}; \quad \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\partial z_{n'}}{\partial x}; \quad \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\partial z_{n'}}{\partial y}$$

sont uniformément convergentes, et la même chose est vraie pour

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}; \quad \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\partial^2 z_{n'}}{\partial x \partial y}.$$

Par conséquent, les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ existent, et la série z dans (23) est une solution de (1).

16. Nous considérons la fonction z_n , qui d'après (22) peut s'écrire sous la forme

$$z_n(0) = \lim_{i, k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{h=0}^i (-1)^{2h+2} (\varphi_{2h+1} z_n)_{P_{2h+1}} + \sum_{h'=0}^k (-1)^{2h'+1} (\psi_{2h'} z_n)_{Q_{2h'}} - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^Q z_n \frac{dU}{dv} ds \right\}.$$

Vu le caractère des données aux limites, les séries

$$\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{2h+2} (\varphi_{2h+1} z_n)_{P_{2h+1}}, \quad \sum_{h'=0}^{\infty} (-1)^{2h'+1} (\psi_{2h'} z_n)_{Q_{2h'}}$$

sont convergentes, ce qui, par conséquent, est vrai aussi pour l'intégrale

$$\int_A^Q z_n \frac{dU}{dv} ds.$$

Ainsi

$$(24) \quad z_0 = \bar{z}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{2h+2} (\varphi_{2h+1} z_n)_{P_{2h+1}} + \sum_{h'=0}^{\infty} (-1)^{2h'+1} (\psi_{2h'} z_n)_{Q_{2h'}} - \frac{1}{2} \int_A^Q z_n \frac{dU}{dv} ds \right\} \\ + \sum_{n'=0}^{\infty} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{2h+1} (\varphi_{2h} z_{n'})_{P_{2h}} + \sum_{h'=0}^{\infty} (-1)^{2h'+2} (\psi_{2h'+1} z_{n'})_{Q_{2h'+1}} + \frac{1}{2} \int_A^P z_{n'} \frac{dU}{dv} ds \right\}.$$

Il nous reste de présenter $\bar{z}$ sous une forme aux éléments convergents.

17. La fonction $\bar{z}$ est, selon le §. 7, régulière à l'intérieur de BAC et sur cette même courbe. Nous intégrons autour de $OPAQO$ selon la méthode de RIEMANN en nous servant des fonctions u et $\bar{z}$, et obtenons

$$\bar{z}_0 = \frac{1}{2} (u \bar{z})_P + \int_{PA} u \left[\frac{1}{2} \frac{d\bar{z}}{dv} ds + \bar{z} (b dx - a dy) \right] + \\ + \frac{1}{2} (u \bar{z})_Q + \int_{AQ} \left[\frac{1}{2} \frac{d\bar{z}}{dv} ds + \bar{z} (b dx - a dy) \right] - \frac{1}{2} \int_{PAQ} \bar{z} \frac{du}{dv} ds.$$

De la même manière nous intégrons autour de $PAP_1; P_1AP_2; \dots; P_{i-1}AP_i; \dots$ en nous servant des fonctions $\varphi_1; \varphi_2; \dots; \varphi_i; \dots$ respectivement

$$0 = - \frac{1}{2} (\varphi_1 \bar{z})_P + \frac{1}{2} (\varphi_1 \bar{z})_{P_1} + \int_{PA P_1} \varphi_1 \left[\frac{1}{2} \frac{d\bar{z}}{dv} ds + \bar{z} (b dx - a dy) \right] - \frac{1}{2} \int_{PA P_1} \bar{z} \frac{d\varphi_1}{dv} ds \\ 0 = + \frac{1}{2} (\varphi_2 \bar{z})_{P_1} - \frac{1}{2} (\varphi_2 \bar{z})_{P_2} + \int_{P_1 A P_2} \varphi_2 \left[\frac{1}{2} \frac{d\bar{z}}{dv} ds + \bar{z} (b dx - a dy) \right] - \frac{1}{2} \int_{P_1 A P_2} \bar{z} \frac{d\varphi_2}{dv} ds$$

$$0 = (-1)^i \frac{1}{2} (\varphi_i \bar{z})_{P_{i-1}} + (-1)^{i+1} \frac{1}{2} (\varphi_i \bar{z})_{P_i} + \\ + \int_{P_{i-1} A P_i} \varphi_i \left[\frac{1}{2} \frac{d\bar{z}}{dv} ds + \bar{z} (b dx - a dy) \right] - \frac{1}{2} \int_{P_{i-1} A P_i} \bar{z} \frac{d\varphi_i}{dv} ds$$

On obtient par l'addition de ces équations et selon les lois de formation des φ_i

$$z_0 = z_A \left[u_P + (\varphi_1)_{P_1} - (\varphi_2)_{P_2} + \dots + (-1)^i (\varphi_{i-1})_{P_{i-1}} + (-1)^{i+1} \frac{1}{2} (\varphi_i)_{P_i} \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} z_A \left[\int_{PAP_1} \frac{d\varphi_1}{dv} ds + \int_{P_1AP_2} \frac{d\varphi_2}{dv} ds + \dots + \int_{P_{i-1}AP_i} \frac{d\varphi_i}{dv} ds \right] + \int_{AP_i} \varphi_i \left[\frac{1}{2} \frac{d\bar{z}}{dv} ds + \bar{z} (b dx - a dy) \right] \\
 & + \frac{1}{2} (u\bar{z})_Q + \int_{AQ} \left[\frac{1}{2} \frac{d\bar{z}}{dv} ds + \bar{z} (a dx - b dy) \right] - \frac{1}{2} \int_{PAQ} \bar{z} \frac{du}{dv} ds.
 \end{aligned}$$

L'expression entre les premières parenthèses tend vers une limite déterminée S^1). Puisque $\int_{AP_i} \varphi_i [\] \rightarrow$ zéro quand $i \rightarrow \infty$, on comprend que la série entre les secondes parenthèses est convergente. De ce fait on tire

$$\begin{aligned}
 \bar{z}_0 = z_A \left(S - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{P_{i-1}AP_i} \frac{d\varphi_i}{dv} ds \right) + \\
 + \frac{1}{2} (u\bar{z})_Q + \int_{AQ} u \left[\frac{1}{2} \frac{d\bar{z}}{dv} ds + \bar{z} (b dx - a dy) \right] - \frac{1}{2} \int_{PAQ} \bar{z} \frac{du}{dv} ds.
 \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement concernant les fonctions ψ_i , on obtient, si l'on pose

$$S' = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[u_Q + (\psi_1)_{Q_1} - (\psi_2)_{Q_2} + \dots + (-1)^i (\psi_{i-1})_{Q_{i-1}} + (-1)^{i+1} \frac{1}{2} (\psi_i)_{Q_i} \right],$$

que

$$(25) \quad \bar{z}_0 = z_A \left\{ S + S' - \frac{1}{2} \left[\int_{PAQ} \frac{du}{dv} ds + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{P_{i-1}AP_i} \frac{d\varphi_i}{dv} ds + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_iAQ_{i-1}} \frac{d\psi_i}{dv} ds \right] \right\}.$$

Par (24) et (25) nous avons donc obtenu une solution dont toutes les séries et toutes les intégrales sont convergentes, comme nous venons de le prouver. Si $\mu_1 > \Omega - 1$, il s'ensuit déjà de (22) que ceci est la seule solution de notre problème aux limites. Si d'autre part $\mu_1 \leq \Omega - 1$, nous ne pouvons pas faire cette conclusion sans de nouvelles recherches.

¹⁾ Cf. II. §. 10

Chapitre II.

1. Maintenant nous allons étudier le problème de M. GOURSAT pour une équation d'une forme plus générale:

$$s = F(x, y, z, p, q, r, t).$$

Dès l'année 1895, M. GOURSAT résolut le problème sous des suppositions analytiques pourvu que les courbes données soient tangentes aux deux directions caractéristiques du point où elles se traversent¹⁾. Il se servait de la méthode classique de CAUCHY, appelée le »Calcul des limites». Peu après (en 1897), M. GOURSAT résolut le problème, même pour le cas où une seule des courbes données est tangente à une direction caractéristique²⁾. A la même époque, M. BEUDON démontra qu'on peut résoudre le problème de 1895 de M. GOURSAT pour une équation à un nombre quelconque de variables indépendantes³⁾.

En 1906, M. GOURSAT a traité le cas général où aucune des deux courbes données n'est tangente à une direction caractéristique⁴⁾. Si

$$F(x, y, z, p, q, r, t) = ax + \beta y + \gamma z + \alpha_1 p + \beta_1 q + ar + bt + \dots,$$

où les coefficients sont supposés réels, la condition de possibilité doit naturellement être que l'équation soit hyperbolique, c'est-à-dire que

$$ab < \frac{1}{4}.$$

Or, M. GOURSAT ne réussit à résoudre le problème que pour le cas où a et b soient de même signe, et bien entendu qu'ils remplissent la condition mentionnée ci-dessus. Cet obstacle fut surmonté en 1911 par E. E. LEVI, qui renonçait également aux suppositions analytiques de M. GOURSAT⁵⁾. LEVI se sert d'approximations successives et emploie du reste des méthodes fort originales qui, pourtant, ne semblent pas applicables au cas où l'équation donnée a un nombre quelconque de variables indépendantes.

En 1921, M. HADAMARD étendait le résultat de M. BEUDON concernant une équation linéaire au cas où une seule des hypersurfaces données est tangente à une caractéristique⁶⁾.

¹⁾ Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre t. I. p. 184.

²⁾ Leçons t. II. p. 303.

³⁾ Bulletin de la Société mathématique t. XXV p. 116.

⁴⁾ Bulletin t. XXXIV p. 100.

⁵⁾ Annali di matematica, serie III, t. XVIII, fasc. 4:0 p. 287.

⁶⁾ Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations (New Haven; Yale University Press) p. 77.

Je vais maintenant traiter le problème pour une équation de la forme la plus générale aux variables indépendantes d'un nombre quelconque, nonobstant si les deux réelles hypersurfaces données sont tangentes à une caractéristique ou non, généralisant ainsi les résultats de M. HADAMARD et de M. BEUDON. Je fais des suppositions analytiques et présume tous les coefficients dans les développements en série réels¹⁾.

2. On cherche donc pour l'équation

$$(1) \quad F \left(\dots; \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}; \dots; \frac{\partial z}{\partial x_i}; \dots; z; \dots; x_i; \dots \right) = 0$$

$$1 \leq i \leq m; \quad 1 \leq k \leq m,$$

qui contient toutes les dérivées du premier et second ordre par rapport aux variables indépendantes $x_1; x_2; \dots x_m$, la solution qui se réduit

$$\begin{aligned} &\text{pour } x_1 = f(x_2; x_3; \dots x_m) \text{ à } z = u(x_2; x_3; \dots x_m) \text{ et} \\ &\text{pour } x_1 = g(x_2; x_3; \dots x_m) \text{ à } z = v(x_2; x_3; \dots x_m). \end{aligned}$$

(Supposons pour le moment que f, g, u et v soient continues et qu'elles aient des dérivées continues du premier et second ordre pour les valeurs considérées de $x_2; x_3; \dots x_m$).

Pour que le problème soit possible, il faut que pour

$$(2^a) \quad f(x_2; x_3; \dots x_m) = g(x_2; x_3; \dots x_m)$$

on ait

$$(2^b) \quad u(x_2; x_3; \dots x_m) = v(x_2; x_3; \dots x_m).$$

Nous nous servons à la suite des désignations suivantes: la surface $x_1 = f(x_2; x_3; \dots x_m)$, la surface $x_1 = g(x_2; x_3; \dots x_m)$, la courbe $f(x_2; x_3; \dots x_m) = g(x_2; x_3; \dots x_m)$.

Il faut, en outre, pour que le problème soit soluble que, à l'aide de (1) et des données aux limites, on puisse calculer toutes les dérivées du premier et du second ordre de la solution en chaque point de la courbe (2^a). On a le long de la courbe

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} f'_{x_i} + \frac{\partial z}{\partial x_i} &= u'_{x_i} \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} g'_{x_i} + \frac{\partial z}{\partial x_i} &= v'_{x_i} \end{aligned} \right\}, i \geq 2.$$

¹⁾ En 1925 seulement, quand j'avais obtenu ce résultat, j'ai trouvé un mémoire de M. GUNTHER (Recueil math. de la société math. de Moscou, 1924) où il discute le problème de 1906 de M. GOURSAT pour l'équation à deux variables indépendantes. Son travail est d'un grand mérite parce qu'il ne demande pas nécessairement que les coefficients $\alpha, \beta, \dots$ soient réels. Sa méthode, qui n'est point identique à la mienne, ne s'étend pas au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes. M. GUNTHER n'a fait, du reste, aucune indication de généralisation de cette espèce. Ma méthode, par laquelle j'ai poursuivi le procédé classique de CAUCHY et de M. GOURSAT, se généralise aisément, quand on a fait des recherches préparatives, pour n'importe quel nombre de variables indépendantes, et voilà qui est intéressant, puisque LEVI a déjà achevé le problème pour deux variables indépendantes.

En éliminant $\frac{\delta z}{\delta x_1}$ entre ces équations, on déduit $\frac{\delta z}{\delta x_i}$. On a en outre

$$\frac{\delta z}{\delta x_1} = \frac{u'_{x_i} - v'_{x_i}}{f'_{x_i} - g'_{x_i}}.$$

Pour obtenir une seule valeur de $\frac{\delta z}{\delta x_1}$ il faut par conséquent que l'expression ci-dessus soit invariable quel que soit le nombre i . Il est facile de démontrer qu'il en est ainsi. Selon (2^a) on peut regarder x_i comme une fonction des autres variables, si

$$f'_{x_i} \neq g'_{x_i}.$$

Je fais donc abstraction du cas où les surfaces données sont tangentes le long de (2^a)¹. De (2) on obtient

$$\begin{aligned} u'_{x_i} \frac{\delta x_i}{\delta x_p} + u'_{x_p} &= v'_{x_i} \frac{\delta x_i}{\delta x_p} + v'_{x_p} \\ f'_{x_i} \frac{\delta x_i}{\delta x_p} + f'_{x_p} &= g'_{x_i} \frac{\delta x_i}{\delta x_p} + g'_{x_p}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire le résultat désiré.

Nous allons maintenant déduire les dérivées du second ordre le long de (2^a)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta^2 z}{\delta x_1^2} f'^2_{x_i} + 2 \frac{\delta^2 z}{\delta x_1 \delta x_i} f'_{x_i} + \frac{\delta^2 z}{\delta x_i^2} &= u''_{x_i^2} - \frac{\delta z}{\delta x_i} f''_{x_i^2} \\ \frac{\delta^2 z}{\delta x_1^2} g'^2_{x_i} + 2 \frac{\delta^2 z}{\delta x_1 \delta x_i} g'_{x_i} + \frac{\delta^2 z}{\delta x_i^2} &= v''_{x_i^2} - \frac{\delta z}{\delta x_i} g''_{x_i^2} \end{aligned} \right\}, i \geq 2.$$

Ainsi on peut exprimer $\frac{\delta^2 z}{\delta x_i^2}$ aussi bien que $\frac{\delta^2 z}{\delta x_1 \delta x_i}$ à l'aide de $\frac{\delta^2 z}{\delta x_1^2}$ et des quantités déjà connues, à savoir

$$(3^a) \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x_i^2} = f'_{x_i} g'_{x_i} \frac{\delta^2 z}{\delta x_1^2} + \frac{f''_{x_i^2} g'_{x_i} - g''_{x_i^2} f'_{x_i}}{f'_{x_i} - g'_{x_i}} \cdot \frac{\delta z}{\delta x_1} - \frac{u''_{x_i^2} g'_{x_i} - v''_{x_i^2} f'_{x_i}}{f'_{x_i} - g'_{x_i}},$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x_1 \delta x_i} = -\frac{1}{2} (f'_{x_i} + g'_{x_i}) \frac{\delta^2 z}{\delta x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{u''_{x_i^2} - v''_{x_i^2} - \frac{\delta z}{\delta x_1} (f''_{x_i^2} - g''_{x_i^2})}{f'_{x_i} - g'_{x_i}}.$$

En remplaçant $\frac{\delta z}{\delta x_1}$ dans le second membre de la deuxième équation par la valeur déjà calculée et en posant

¹) Ceci correspond au cas B du chap. I.

$$\frac{u'_{x_i} - v'_{x_i}}{f'_{x_i} - g'_{x_i}} = r_i(x_2; x_3; \dots x_m),$$

on aura

$$(3^b) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_i} = -\frac{1}{2} (f'_{x_i} + g'_{x_i}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial x_i}.$$

Pour exprimer $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$, où $i \geq 2$, $k \geq 2$, $i \neq k$, le long de (2^a) on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} f'_{x_k} f'_{x_i} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_k} f'_{x_i} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_i} f'_{x_k} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = u''_{x_i x_k} - \frac{\partial z}{\partial x_1} f''_{x_i x_k},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} g'_{x_k} g'_{x_i} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_k} g'_{x_i} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_i} g'_{x_k} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = v''_{x_i x_k} - \frac{\partial z}{\partial x_1} g''_{x_i x_k}.$$

Ces deux équations donnent la même valeur pour $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ si (En retranchant l'une équation de l'autre et en portant les valeurs des dérivées $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_i}$, tirées des formules (3), dans le restant de la soustraction, on s'aperçoit que les termes contenant $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}$ disparaissent)

$$(f'_{x_i} - g'_{x_i}) \frac{\partial r_k}{\partial x_k} + (f'_{x_k} - g'_{x_k}) \frac{\partial r_i}{\partial x_i} = 2 (f'_{x_i} - g'_{x_i}) \frac{\partial r_i}{\partial x_k}.$$

On peut facilement démontrer que cette équation est vraie le long de la courbe (2^a). Car le long de celle-ci

$$r_i = r_k$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + \frac{\partial r_i}{\partial x_k} = \frac{\partial r_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + \frac{\partial r_k}{\partial x_k},$$

et par conséquent,

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_i} = \frac{\partial r_k}{\partial x_i} \quad \frac{f'_{x_i} - g'_{x_i}}{g'_{x_k} - f'_{x_k}} \quad \text{ou}$$

$$(f'_{x_i} - g'_{x_i}) \frac{\partial r_k}{\partial x_k} - (f'_{x_i} - g'_{x_i}) \frac{\partial r_i}{\partial x_k} + (f'_{x_k} - g'_{x_k}) \frac{\partial r_i}{\partial x_i} - (f'_{x_k} - g'_{x_k}) \frac{\partial r_k}{\partial x_i} = 0.$$

Il suffit donc de démontrer que le long de (2^a)

$$(f'_{x_i} - g'_{x_i}) \frac{\delta r_i}{\delta x_k} = (f'_{x_k} - g'_{x_k}) \frac{\delta r_k}{\delta x_i},$$

ce qui est facile à vérifier.

On obtient donc l'expression suivante pour $\frac{\delta^2 z}{\delta x_i \delta x_k}$ le long de (2^a):

$$(3^c) \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x_i \delta x_k} = \frac{1}{2} (f'_{x_i} g'_{x_k} + f'_{x_k} g'_{x_i}) \frac{\delta^2 z}{\delta x_1^2} + \dots,$$

où les termes exclus sont déjà connus.

Toutes les dérivées du second ordre le long de (2^a) peuvent donc être considérées comme des fonctions de $\frac{\delta^2 z}{\delta x_1^2}$ et $m-2$ variables par exemple $x_3; x_4; \dots x_m$. Si l'on porte ces dérivées (ainsi que les valeurs déjà connues de z et des dérivées du premier ordre) dans (1), on peut en général obtenir $\frac{\delta^2 z}{\delta x_1^2}$ comme une fonction de $x_3; x_4; \dots x_m$, d'où l'on déduit les autres dérivées du second ordre selon les formules (3).

Je précise encore. En partant d'un point déterminé $(x_1)_0; (x_2)_0; \dots (x_m)_0$ sur (2^a) pour lequel $(z)_0$ et toutes les $\left(\frac{\delta z}{\delta x_i}\right)_0$ sont connues, on obtient, si l'on porte les dérivées (3) dans (1), une valeur de $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x_1^2}\right)_0$ et ensuite toutes les autres $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x_i \delta x_k}\right)_0$. Je présume que F , regardée comme une fonction de $\dots, \frac{\delta^2 z}{\delta x_i \delta x_k}, \dots, \frac{\delta z}{\delta x_i}, \dots, z, \dots, x_i, \dots$, est développable en série entière dans le voisinage de la multiplicité initiale, et que tel est aussi le cas pour les fonctions f, g, u, v . Je présume en outre que tous les coefficients dans ces développements en série sont réels. On a donc:

$$(1') \quad F \left\{ \dots; \left[\frac{\delta^2 z}{\delta x_i \delta x_k} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x_i \delta x_k} \right)_0 \right]; \dots; \left[\frac{\delta z}{\delta x_i} - \left(\frac{\delta z}{\delta x_i} \right)_0 \right]; \dots; [z - z_0]; \dots; [x_i - (x_i)_0]; \dots \right\} = 0.$$

Pour qu'il soit possible de déduire les dérivées du second ordre comme des fonctions analytiques de $x_3 - (x_3)_0, \dots x_m - (x_m)_0$ le long de (2^a), il faut, si l'on pose

$$f(x_2; x_3; \dots x_m) - x_1 = \varphi(x_1; x_2; x_3; \dots x_m),$$

$$g(x_2; x_3; \dots x_m) - x_1 = \psi(x_1; x_2; x_3; \dots x_m),$$

$$\left(\frac{\delta F}{\delta \frac{\delta^2 z}{\delta x_i \delta x_k}} \right)_0 = a_{ik}$$

que

$$(4) \quad \sum a_{ik} (\varphi'_{x_i} \psi'_{x_k} + \varphi'_{x_k} \psi'_{x_i})_0 \neq 0.$$

Je fais abstraction du cas où cette expression est zéro. S'il y a deux variables indépendantes, cela signifie que le rapport anharmonique des tangentes aux deux courbes données et des tangentes caractéristiques, issues du point initial, est -1 ¹⁾.

3. Si la multiplicité initiale est placée sur une caractéristique $\Phi(x_1; x_2; \dots x_m) = 0$, il faut, comme on sait²⁾, que

$$(5) \quad \sum a_{ik} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right)_0 = 0.$$

Comme le premier membre de cette équation est une forme quadratique par rapport aux dérivées $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_0$, il peut s'écrire sous forme d'une somme algébrique de carrés de fonctions linéaires de ces dérivées³⁾. Si les carrés sont au nombre de m et sont joints par les mêmes signes, l'équation est dite du type *elliptique*. Alors on ne peut associer aucune caractéristique réelle à la multiplicité initiale. Si les carrés sont au nombre de m et joints de signes différents, l'équation est dite du type *hyperbolique*, et on peut trouver des caractéristiques réelles qui s'adaptent à la multiplicité initiale. Si le nombre des carrés est inférieur à m l'équation est dite du type *parabolique*. Dans ce cas l'équation peut avoir des caractéristiques réelles, ou ne pas en avoir, si les carrés sont joints respectivement par des signes différents ou égaux.

Je fais maintenant un changement de variables

$$\xi_1 = \varphi(x_1; x_2; x_3; \dots x_m); \xi_2 = \psi(x_1; x_2; x_3; \dots x_m); \xi_3 = x_3; \dots \xi_m = x_m,$$

dont tous les x deviennent des fonctions des ξ , puisque d'après les suppositions précédentes

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{x_1} & \varphi'_{x_2} \\ \psi'_{x_1} & \psi'_{x_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

La solution cherchée z se transforme donc en une fonction de $\xi_1; \xi_2; \xi_3; \dots \xi_m$ qui

pour $\xi_1 = 0$ se réduit à $z = u(\xi_2; \xi_3; \dots \xi_m)$ et

pour $\xi_2 = 0$ se réduit à $z = v(\xi_2; \xi_3; \dots \xi_m)$.

La nouvelle multiplicité initiale

$$\dots, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_i} \right)_0, \dots, z_0, \dots, (\xi_i)_0, \dots$$

se calcule à l'aide de ces conditions et de l'équation transformée. Pour étudier la forme de cette équation nous formons

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \varphi'_{x_1} + \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \psi'_{x_1},$$

¹⁾ Cf. GOURSAT: Annales de la Faculté des sciences de Toulouse 2:^e série, t. V, p. 432.

²⁾ Cf. BEUDON l. c. p. 115.

³⁾ Cf. par exemple H. WEBER: Lehrbuch der Algebra I p. 212.

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x_1 \delta x_2} = \frac{\delta^2 z}{\delta \xi_1^2} \varphi'_{x_1} \varphi'_{x_2} + \frac{\delta^2 z}{\delta \xi_1 \delta \xi_2} \varphi'_{x_1} \psi'_{x_2} + \frac{\delta^2 z}{\delta \xi_1 \delta \xi_2} \varphi'_{x_2} \psi'_{x_1} + \frac{\delta^2 z}{\delta \xi_2^2} \psi'_{x_1} \psi'_{x_2} + \dots$$

Les termes non écrits ne contiennent pas de dérivées du second ordre. Ainsi l'égalité symbolique suivante peut s'écrire

$$\frac{\delta}{\delta x_1} \cdot \frac{\delta}{\delta x_2} \cdot z = \left(\frac{\delta}{\delta \xi_1} \varphi'_{x_1} + \frac{\delta}{\delta \xi_2} \psi'_{x_1} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \xi_1} \varphi'_{x_2} + \frac{\delta}{\delta \xi_2} \psi'_{x_2} \right) z + \dots$$

En général on remplace dans la dérivée

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta}{\delta x_k} \cdot z,$$

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \text{ par } \frac{\delta}{\delta \xi_1} \varphi'_{x_i} + \frac{\delta}{\delta \xi_2} \psi'_{x_i}, \text{ si } i \leq 2,$$

$$\text{et par } \frac{\delta}{\delta \xi_1} \varphi'_{x_i} + \frac{\delta}{\delta \xi_2} \psi'_{x_i} + \frac{\delta}{\delta \xi_i}, \text{ si } i > 2.$$

Pour l'équation transformée

$$(1'') \quad G \left\{ \dots, \left[\frac{\delta^2 z}{\delta \xi_i \delta \xi_k} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta \xi_i \delta \xi_k} \right)_0 \right], \dots \right\} = 0$$

les coefficients a , b et c de $\frac{\delta^2 z}{\delta \xi_1^2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta \xi_1^2} \right)_0$, $\frac{\delta^2 z}{\delta \xi_1 \delta \xi_2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta \xi_1 \delta \xi_2} \right)_0$ et $\frac{\delta^2 z}{\delta \xi_2^2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta \xi_2^2} \right)_0$ deviennent respectivement

$$a = \sum a_{ik} (\varphi'_{x_i})_0 (\varphi'_{x_k})_0,$$

$$b = \sum a_{ik} [(\varphi'_{x_i})_0 (\psi'_{x_k})_0 + (\varphi'_{x_k})_0 (\psi'_{x_i})_0],$$

$$c = \sum a_{ik} (\psi'_{x_i})_0 (\psi'_{x_k})_0.$$

Quand on forme, de façon ordinaire, l'équation d'une caractéristique

$$\Phi(\xi_1; \xi_2; \dots \xi_m) = 0$$

de l'équation (1'') associée à la multiplicité initiale, on comprend aisément qu'elle s'obtient, si dans (5) on remplace

$$\left(\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} \right)_0 \text{ par } \left(\frac{\delta \Phi}{\delta \xi_1} \right)_0 (\varphi'_{x_i})_0 + \left(\frac{\delta \Phi}{\delta \xi_2} \right)_0 (\psi'_{x_i})_0, \text{ si } i \leq 2,$$

$$\text{et par } \left(\frac{\delta \Phi}{\delta \xi_1} \right)_0 (\varphi'_{x_i})_0 + \left(\frac{\delta \Phi}{\delta \xi_2} \right)_0 (\psi'_{x_i})_0 + \left(\frac{\delta \Phi}{\delta \xi_i} \right)_0, \text{ si } i > 2.$$

On conçoit donc que le caractère elliptique, hyperbolique ou parabolique ne se change pas par la transformation.

Si l'on pose

$$z = z' + z(0; \xi_2; \xi_3; \dots, \xi_m) + z(\xi_1; 0; \xi_3; \dots, \xi_m) - z(0; 0; \xi_3; \dots, \xi_m) + \xi_1 \xi_2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)_0,$$

on a pour $\xi_1 = 0$, $z' = 0$ et pour $\xi_2 = 0$, $z' = 0$. En outre, toutes les dérivées de z' du premier et second ordre sont nulles au point initial. L'équation (1'') se transforme par cette substitution en une autre où les coefficients de $\frac{\partial^2 z'}{\partial \xi_1^2}$, $\frac{\partial^2 z'}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}$ et $\frac{\partial^2 z'}{\partial \xi_2^2}$ sont toujours a , b et c respectivement. Puisque $b \neq 0$ d'après (4), on peut la résoudre par rapport à $\frac{\partial^2 z'}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}$, et on a donc (après avoir rejeté l'accent et remplacé $\xi_i - (\xi_i)_0$ par ξ_i)

$$(1''') \quad a \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + c \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_2^2} = H \left(\dots, \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i \partial \xi_k}, \dots, \frac{\partial z}{\partial \xi_i}, \dots, z, \dots, \xi_i, \dots \right),$$

où H est une série entière sans terme constant, contenant toutes les dérivées du premier ordre, toutes les dérivées du second ordre à l'exception de $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}$, et où

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1^2}} \right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_2^2}} \right)_0 = 0.$$

Le problème que je dois résoudre est donc le suivant. *Je cherche pour l'équation*

$$(6) \quad ar + bs + ct = F(x, y, \dots, x_i, \dots, z, p, q, \dots, p_{x_i}, \dots, r, t, \dots, p_{xx_i}, \dots, p_{yx_i}, \dots, p_{x_i x_k}, \dots),$$

$$1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq m,$$

la solution qui se réduit à nulle pour $x = 0$ et pour $y = 0$. On a posé ici

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad p_{xx_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x_i}; \quad p_{yx_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x_i}; \quad p_{x_i x_k} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k};$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad p_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

F est nulle pour

$$x = y = \dots = z = p = q = \dots = p_{x_i} = \dots = r = t = \dots = p_{xx_i} = \dots = p_{yx_i} = \dots = p_{x_i x_k} = \dots = 0$$

et développable en série entière dans le voisinage de ces valeurs. En outre,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_0 = 0.$$

Tous les coefficients sont réels.

4. Il ressort de la démonstration qui va suivre qu'il est nécessaire d'élucider la signification de la condition

$$(7) \quad b^2 - 4ac > 0.$$

Si l'une des surfaces données ($\xi_1 = 0$ ou $\xi_2 = 0$) (je reprends ici les désignations du § 3) est une caractéristique ou tangente à une caractéristique, on a $a = 0$ ou $c = 0$, et par conséquent la condition est remplie. Pour qu'elle soit remplie généralement, il faut que

$$(8) \quad a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$$

soit une forme décomposable en facteurs réels. On obtient le polynôme (8) en posant dans

$$(9) \quad \sum a_{ik} x_i x_k$$

$$x_i = \xi_1 (\varphi'_{x_i})_0 + \xi_2 (\psi'_{x_i})_0.$$

Si (9) est une expression qui ne peut pas changer de signe, c'est-à-dire si l'équation est elliptique ou elliptiquement parabolique, (8) est de forme indécomposable et, par conséquent, la condition n'est pas remplie. Si (9) est une somme de carrés de fonctions linéaires par rapport aux x_i joints par des signes différents, on peut écrire

$$a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 = (a_1\xi_1^2 + b_1\xi_1\xi_2 + c_1\xi_2^2) - (a_2\xi_1^2 + b_2\xi_1\xi_2 + c_2\xi_2^2),$$

où les deux termes du second membre sont toujours positifs. Il est facile de se convaincre qu'il y a des valeurs des constantes telles que (8) devient décomposable, mais il y en a aussi de telles qui font de (8) une forme indécomposable. La condition que l'équation doit être hyperbolique ou hyperboliquement parabolique ne suffit donc pas pour que (7) soit remplie (si le nombre des variables indépendantes n'est pas deux).

5. M. GOURSAT¹⁾ cherchait pour l'équation

$$ax + by + cz = F(x, y, z, p, q),$$

où a, b, c sont des fonctions de x et y , la solution qui se réduit à nulle quand $x = 0$ et quand $y = 0$.

Il trouva que, si

$$b^2 - 4ac > 0 \quad (\text{Cas } A),$$

le problème est toujours soluble, mais si

$$b^2 - 4ac < 0 \quad (\text{Cas } B)$$

le problème n'est pas généralement soluble³⁾. Car si on considère le rapport anharmonique des tangentes aux deux courbes données et des tangentes caractéristiques au point initial

¹⁾ Cf. GOURSAT l. c (Annales de la Fac. de Sc. de Toulouse).

²⁾ Je suppose le problème transformé de la même façon qu'au § 3.

³⁾ M. GOURSAT ne fait qu'exemplifier cela (cf. l. c. p. 433).

$$\frac{\frac{b}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4ac}}{\frac{b}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4ac}} = \cos 2\omega - i \sin 2\omega$$

et si ω est commensurable avec π , alors le problème est impossible ou indéterminé¹⁾.

Les conditions de possibilité concernant a , b , c , ω sont textuellement les mêmes aussi pour le problème plus général, posé à la fin du §. 3, fait que je vais démontrer dans l'exposé suivant.

6. D'abord je vais traiter le cas A . Dans l'équation (6) on peut, naturellement, poser $b = 1$. Je suppose ainsi

$$1 - 4ac > 0.$$

Je présume d'abord que a et c sont du même signe²⁾, disons que tous les deux sont négatifs³⁾. Je remplace a et c par $-a$ et $-c$, où $a > 0$, $c > 0$, et j'envisage, pour obtenir une série majorante pour la solution cherchée, l'équation

$$(10) \quad -ar + s - bt =$$

$$= \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} + x_1 + \dots + x_m + z + p + q + \dots + p_m}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m p_{x_i x_k}}{R}\right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^m p_{xx_i}}{R}\right)}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m p_{yx_i}}{R} - M \left(1 + \frac{r+t}{R}\right).$$

$$\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^m p_{yx_i}}{R}\right) \left(1 - \frac{r+t}{R}\right)$$

Ici $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta < 1$ et G une série majorante, de caractère ordinaire, relativement à F^4). Je cherche une solution de (10) de la forme

$$z = z(u, v); \quad u = \alpha x + \beta y; \quad v = x_1 + x_2 + \dots + x_m.$$

S'il y en a une, elle doit satisfaire à l'équation

$$(-\alpha^2 + \alpha\beta - \beta^2) \frac{\delta^2 z}{\delta u^2} =$$

¹⁾ Le cas où $b^2 - 4ac = 0$ est indiscutable selon la méthode ici employée (cf. p. 50).

²⁾ M. GOURSAT a traité ce cas pour une équation à deux variables (cf. § 1). Néanmoins, je l'étudie à fond d'après ma propre méthode, puisque les résultats obtenus sont le fondement de la discussion suivante.

³⁾ Le cas où tous les deux sont positifs se traite sans difficulté si l'on s'appuie sur le résultat qu'on va obtenir.

⁴⁾ Cf. GOURSAT: Leçons... t. II p. 306.

$$= \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{u}{a\beta} + v + z + (a+\beta) \frac{\partial z}{\partial u} + m \frac{\partial z}{\partial v}}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{m(m+1)}{2R} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) \left(1 - \frac{am}{R} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right)} \\ \left(1 - \frac{\beta m}{R} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) \left(1 - \frac{a^2 + \beta^2}{R} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right) - M \left(1 + \frac{a^2 + \beta^2}{R} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

Je transcris

$$-a a^2 + a\beta - c\beta^2 = -a\beta^2 \left(\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{\beta} + \frac{c}{a}\right) = \\ -a\beta^2 \left(\frac{a}{\beta} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{1-4ac}\right) \left(\frac{a}{\beta} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{1-4ac}\right).$$

On peut toujours choisir les nombres a et β de telle façon que

$$\frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{1-4ac} < \frac{a}{\beta} < \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{1-4ac}.$$

Alors

$$A = -a a^2 + a\beta - c\beta^2 > 0.$$

En outre,

$$B = \frac{a^2 + \beta^2}{R} > 0.$$

L'équation peut s'écrire sous la forme

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - (AB + MB^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)^2 = \\ = \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{u}{a\beta} + v + z + (a+\beta) \frac{\partial z}{\partial u} + m \frac{\partial z}{\partial v}}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{m(m+1)}{2R} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) \left(1 - \frac{am}{R} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) \left(1 - \frac{\beta m}{R} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right)} - M.$$

Cette équation a une solution et une seule qui pour $u = 0$ se réduit à zéro et pour laquelle en outre $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$ et $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)_0 = 0^1$. On obtient donc une solution holomorphe de (10) sous la forme

$$(11) \quad z = u^2 (c_1 u + c_2 v + c_3 u^2 + c_4 uv + c_5 v^2 + \dots),$$

et on trouve facilement que tous les coefficients $c_1; c_2; \dots$ sont positifs.

¹⁾ Cf. par exemple GOURSAT: Cours d'Analyse t. III. p. 47.

On calcule à l'aide de (11) les valeurs de toutes les dérivées

$$(12) \quad (p_{x_1}^{k_1} \dots p_{x_m}^{k_m})_0 \text{ et } (p_{y_1}^{k_1} \dots p_{x_m}^{k_m})_0.$$

Celles-ci sont, d'ailleurs, nulles si $k = 0$ ou si $k = 1$ et, de plus $(r)_0 = (t)_0 = 0$. En outre, elles sont toutes positives ou nulles et, par conséquent, supérieures aux dérivées correspondantes de la solution cherchée de l'équation (6), lesquelles sont toutes nulles. A l'aide des dérivées (12) toutes les autres dérivées de (11) à l'origine peuvent se calculer. On a d'abord $(s)_0 = 0$ et en prenant les dérivées par rapport à $x_1; x_2; \dots x_m$ on déduit toutes les dérivées

$$(p_{xyx_1}^{k_1} \dots p_{x_m}^{k_m})_0.$$

En différentiant par rapport à x et à y respectivement on aura

$$(13') \quad \begin{cases} p_{2,1} - c p_{1,2} = \frac{dG}{dx} + a p_{3,0} \\ -a p_{2,1} + p_{1,2} = \frac{dG}{dy} + c p_{0,3}. \end{cases}$$

Comme les dérivées par rapport à x et y sont celles qui reviennent le plus souvent, je pose dans un but de simplification

$$p_{3,0} = p_{x^3}; p_{2,1} = p_{x^2y}; \dots$$

Dans (13') on a

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\delta G}{\delta x} + \frac{\delta G}{\delta z} p_{1,0} + \dots + \frac{\delta G}{\delta r} p_{3,0} + \frac{\delta G}{\delta t} p_{1,2} + \dots$$

Les termes non-écrits renferment des dérivées qui par rapport à x et y sont du deuxième ordre tout au plus, c'est-à-dire ils sont déjà calculés à l'origine. Une forme analogue s'obtient pour $\frac{dG}{dy}$. Puisque $\left(\frac{\delta G}{\delta r}\right)_0 = \left(\frac{\delta G}{\delta t}\right)_0 = 0$, le second membre de chaque équation (13') ne contient que des dérivées déjà connues à l'origine, et on peut à l'aide de ces équations calculer $(p_{2,1})_0$ et $(p_{1,2})_0$. Je transcris (13')

$$\begin{cases} p_{2,1} - c p_{1,2} = \frac{\delta G}{\delta r} p_{3,0} + \frac{\delta G}{\delta t} p_{1,2} + a p_{3,0} + \dots \\ -a p_{2,1} + p_{1,2} = \frac{\delta G}{\delta r} p_{2,1} + \frac{\delta G}{\delta t} p_{0,3} + c p_{0,3} + \dots \end{cases}$$

Les termes non-écrits renferment des dérivées qui par rapport à x et y sont du deuxième ordre tout au plus. En différentiant les équations par rapport à x_i on aura

$$\begin{aligned} p_{2,1,x_i} - c p_{1,2,x_i} &= \frac{\delta G}{\delta r} p_{3,0,x_i} + \frac{\delta G}{\delta t} p_{1,2,x_i} + a p_{3,0,x_i} + \dots \\ -a p_{2,1,x_i} + p_{1,2,x_i} &= \frac{\delta G}{\delta r} p_{2,1,x_i} + \frac{\delta G}{\delta t} p_{0,3,x_i} + c p_{0,3,x_i} + \dots \end{aligned}$$

Les termes non-écrits contiennent des dérivées qui par rapport à x et y sont du deuxième ordre tout au plus, et les dérivées $p_{3,0}$; $p_{2,1}$; $p_{1,2}$; $p_{0,3}$, déjà connues à l'origine. A ce point les deuxièmes membres ne renferment que des dérivées déjà calculées. On peut ainsi déduire $(p_{2,1}, x_i)_{0}$; $(p_{1,2}, x_i)_{0}$, où $1 \leq i \leq m$. En différentiant par rapport à x_k on aura

$$\begin{aligned} p_{2,1}, x_i, x_k - c p_{1,2}, x_i, x_k &= \frac{\delta G}{\delta y} p_{3,0}, x_i, x_k + \frac{\delta G}{\delta t} p_{1,2}, x_i, x_k + a p_{3,0}, x_i, x_k + \dots \\ -a p_{2,1}, x_i, x_k + p_{1,2}, x_i, x_k &= \frac{\delta G}{\delta y} p_{2,1}, x_i, x_k + \frac{\delta G}{\delta t} p_{0,3}, x_i, x_k + c p_{0,3}, x_i, x_k + \dots \end{aligned}$$

Les termes non-écrits renferment des dérivées déjà calculées à l'origine. On peut ainsi de proche en proche déduire toutes les dérivées

$$(p_{2,1}, x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m})_0; (p_{1,2}, x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m})_0.$$

En différentiant (13') par rapport à x et y on aura

$$(13^2) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{3,1} - c p_{2,2} &= \frac{\delta G}{\delta y} p_{4,0} + \frac{\delta G}{\delta t} p_{2,2} + a p_{4,0} + \dots \\ -a p_{3,1} + p_{2,2} - c p_{1,3} &= \frac{\delta G}{\delta y} p_{3,1} + \frac{\delta G}{\delta t} p_{1,3} + \dots \\ -a p_{2,2} + p_{1,3} &= \frac{\delta G}{\delta y} p_{2,2} + \frac{\delta G}{\delta t} p_{0,4} + c p_{0,4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Les termes non-écrits contiennent des dérivées qui par rapport à x et y sont du troisième ordre tout au plus, c'est-à-dire déjà calculées à l'origine. De (13²) on déduit $(p_{3,1})_0$, $(p_{2,2})_0$, $(p_{1,3})_0$ et puis en différentiant par rapport à x_1 ; ...; x_m

$$(p_{3,1}, x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m})_0, (p_{2,2}, x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m})_0, (p_{1,3}, x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m})_0.$$

D'une façon générale les dérivées

$$(p_{i,1}, x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m})_0, (p_{i-1,2}, x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m})_0, \dots, (p_{1,i}, x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m})_0$$

s'obtiennent des équations

$$(13^{i-1}) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{i,1} - c p_{i-1,2} &= \dots + a p_{i+1,0} \\ -a p_{i,1} + p_{i-1,2} - c p_{i-2,3} &= \dots \\ -a p_{i-1,2} + p_{i-2,3} - c p_{i-3,4} &= \dots \\ \dots &\dots \\ -a p_{3,i-2} + p_{2,i-1} - c p_{1,i} &= \dots \\ -a p_{2,i-1} + p_{1,i} &= \dots + c p_{0,i-1} \end{aligned} \right.$$

ou directement ou en différentiant par rapport à x_1 ; ... x_m . Les termes non-écrits ne contiennent que des dérivées qui sont déjà connues à l'origine. On observe donc que les seconds membres sont des polynômes qui renferment a , c , les coefficients de G et des dérivées

déjà calculées ou données à l'origine. Les termes de ces polynômes sont toujours joints par le signe +.

A l'aide des dérivées (12) et des équations (13) on peut par conséquent calculer toutes les autres dérivées de la solution (11) à l'origine. De cette façon on obtient donc les coefficients d'une série convergente, car la série trouvée n'est aucune autre que (11).

7. Pour des raisons qu'on va concevoir j'étudierai le déterminant

$$D_i = \begin{vmatrix} 1, & -c, & & & & & & & \\ -a, & 1, & -c, & & & & & & \\ & -a, & 1, & -c, & & & & & \\ & & -a, & 1, & -c, & & & & \\ & & & -a, & 1, & & & & \\ & & & & -a, & 1, & & & \\ & & & & & -a, & & & \\ & & & & & & & & -c, \\ & & & & & & & & & 1, & -c, \\ & & & & & & & & & -a, & 1, & -c \\ & & & & & & & & & & -a, & 1 \end{vmatrix}$$

(i lignes et i colonnes).

Si l'on pose $ac = q$, on aura

$$(14) \quad \begin{cases} D_i = D_{i-1} - q D_{i-2} \\ \hline D_4 = D_3 - q D_2 \\ D_3 = D_2 - q \\ D_2 = 1 - q. \end{cases}$$

Comme la valeur de D_i dépend seulement de q , on peut écrire

$$D_i = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ q, & 1, & 1 \\ & q, & 1, & 1 \\ & & q, & 1, & 1 \\ & & & q, & 1, & . \\ & & & & q, & . & . \\ & & & & & . & . & . \\ & & & & & & . & . & 1 \\ & & & & & & & . & 1, & 1 \\ & & & & & & & & q, & 1 \end{vmatrix}$$

(i lignes et i colonnes).

Dans le but d'étudier l'ordre de grandeur de D_i , j'envisage le déterminant

$$\begin{vmatrix}
 1, & 1, & & & & & \\
 Q, & 1, & 1, & & & & \\
 & q, & 1, & & & & \\
 & & q, & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & & & 1, & 1 \\
 & & & & & & & q, & 1
 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
 1-Q, & 1, & & & & & \\
 q, & 1, & & & & & \\
 & q, & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1, & 1 \\
 & & & & & & q, & 1
 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-Q) \cdot \begin{vmatrix}
 1, & 1, & & & & & \\
 \frac{q}{1-Q}, & 1, & & & & & \\
 & q, & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1, & & \\
 & & & & & 1, & 1 \\
 & & & & & & q, & 1
 \end{vmatrix}.$$

On en conclut que

$$D_i = (1 - Q_1) (1 - Q_2) (1 - Q_3) \dots (1 - Q_{i-2}) (1 - Q_{i-1})$$

où

$$Q_1 = q; \quad Q_2 = \frac{q}{1 - Q_1}; \quad Q_3 = \frac{q}{1 - Q_2}; \quad \dots \quad Q_{i-1} = \frac{q}{1 - Q_{i-2}}.$$

Si l'on suppose que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = Q$$

existe, on aura

$$Q = \frac{q}{1 - Q}; \quad Q = \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} - q}.$$

Pour que la limite Q existe, il faut donc que $q \leq \frac{1}{4}$, condition qui est remplie dans le cas A . On a

$$Q_1 < Q_2 < \frac{1}{2}.$$

Car $Q_1 < Q_2$, c'est-à-dire $q < \frac{q}{1 - q}$, si $q > 0$, et $Q_2 < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{q}{1 - q} < \frac{1}{2}$, si $q < \frac{1}{3}$.

Il s'ensuit à son tour que

$$Q_2 < Q_3 < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Car } Q_3 = \frac{q}{1-Q_2} > \frac{q}{1-Q_1} = Q_2 \text{ et } Q_3 = \frac{q}{1-Q_2} < \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

On aura donc

$$Q_1 < Q_2 < Q_3 < \dots < Q_i < \dots < \frac{1}{2}.$$

Q_i tend donc vers une limite $\leq \frac{1}{2}$, et par conséquent

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - q}.$$

On peut en conclure que D_i est toujours positif et que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D_i = 0.$$

Je forme maintenant un déterminant constitué par D_m et D_n posés diagonalement l'un après l'autre

$$D_{m,n} = \begin{vmatrix} 1, & -c & & & & \\ -a, & 1, & . & & & \\ & -a, & . & . & & \\ & & . & . & -c & \\ D_m & & & . & 1, & -c \\ & & & -a, & 1 & \\ \hline & & & & & 1, & -c \\ & & & & & -a, & 1, & . & & D_n \\ & & & & & & -a, & . & -c & \\ & & & & & & . & 1, & -c & \\ & & & & & & & -a, & 1 & \end{vmatrix}.$$

En se servant de cette nouvelle désignation on aura

$$(15) \quad D_{m,n} = D_m \cdot D_n$$

pour chaque $m \geq 2$ et chaque $n \geq 2$.

Si dans D_i on remplace le nombre $(0, 1, -a, -c)$ qui se trouve dans la $m_1^{i\text{ème}}$ ligne et dans la $n^{i\text{ème}}$ colonne par 1, et si l'on met tous les autres éléments de la même ligne $= 0$, on obtient un déterminant que nous désignons $A_{m_1; n}$. Ce déterminant s'obtient en multipliant par $(-1)^{m_1-1+n-1}$ le déterminant qu'on a en effaçant dans D_i la $m_1^{i\text{ème}}$ ligne et la $n^{i\text{ème}}$ colonne, à savoir (supposons par exemple $m_1 \geq n$)

On obtient donc le résultat que tous les mineurs du premier ordre de D_i sont positifs.

8. Maintenant je retourne au calcul des dérivées à l'origine pour la solution (11) de l'équation (10) à l'aide des dérivées (12), qui sont toutes positives ou nulles. Le calcul se faisait successivement à l'aide des équations (13). On obtient chaque dérivée comme une fonction linéaire des seconds membres de ces équations. Les coefficients sont de la forme

$$\frac{A_{m,n}}{D_i},$$

et par conséquent positifs. Il s'ensuit que chaque dérivée à l'origine est un polynôme renfermant a, c , les coefficients de G et des dérivées déjà calculées ou données. Les termes du polynôme ne sont joints que par le signe $+$. Si on cherche la solution de (6) qui se réduit à nulle pour $x = 0$ et pour $y = 0$, on voit de proche en proche que les valeurs absolues des dérivées à l'origine sont inférieures aux dérivées correspondantes de (11): Il est donc établi qu'il existe une solution et une seule au voisinage de l'origine.

Peut-on faire la même conclusion si a aussi bien que c changent de signe sans changer de valeur absolue? Dans ce cas les déterminants D_i ont les mêmes valeurs et les mineurs $A_{m,n}$ ont les mêmes valeurs absolues. La convergence de la solution cherchée s'établit exactement de la même façon que tout à l'heure. Il nous reste de traiter le cas où a et c ont des signes différents. Pour fixer les idées, posons $a = \bar{a}$, $c = -\bar{c}$, où $\bar{a} > 0$, $\bar{c} > 0$. J'étudie maintenant aussi les déterminants D_i et $A_{m,n}$, lesquels je désigne par $\bar{D}_i$ et $\bar{A}_{m,n}$ pour les distinguer des déterminants correspondants précédents.

On calcule d'abord les dérivées à l'origine de la solution cherchée de l'équation

$$(6') \dots \bar{a}r + s - \bar{c}t = F(x, y, \dots, \phi_{x_i, x_k}, \dots)$$

qui se réduit à nulle pour $x = 0$ et pour $y = 0$. On voit alors que les termes contenant $\bar{a}$ et $\bar{c}$ aux seconds membres des équations (13) s'évanouissent. On compare ces dérivées aux dérivées correspondantes de la solution (11) de l'équation (10). On voit ainsi que (11) s'obtient comme série majorante pour la solution cherchée de (6'), si, $\bar{a}$ et $\bar{c}$ étant donnés, on peut trouver deux nombres a et c qui remplissent la condition A, de façon que

$$(17') \left| \frac{c^{m_1-n} \bar{D}_{i-m_1} \bar{D}_{n-1}}{\bar{D}_i} \right| \leq \frac{c^{m_1-n} D_{i-m_1} D_{n-1}}{D_i}; m_1 \geq n;$$

$$(17'') \left| \frac{\bar{a}^{n-m_2} \bar{D}_{i-n} \bar{D}_{m_2-1}}{\bar{D}_i} \right| \leq \frac{a^{n-m_2} D_{i-n} D_{m_2-1}}{D_i}; m_2 \leq n.$$

9. Avant de discuter les inégalités (17) j'étudierai les déterminants $\bar{D}_i$. On pose $\bar{a} \bar{c} = \bar{q}$ et obtient, en se référant à (14),

$$(14') \bar{D}_i = \bar{D}_{i-1} + \bar{q} \bar{D}_{i-2}$$

De la même façon, en se référant à (15), on a pour $m \geq 2$, $n \geq 2$

$$(15') \quad \bar{D}_{m, n} = \bar{D}_m \cdot \bar{D}_n.$$

Puisque les nombres $\bar{D}_i$ sont croissants avec l'indice i , on aura

$$(18) \quad \bar{D}_{m+n} > \bar{D}_m \cdot \bar{D}_n$$

pour toutes les nombres de m et n , et puisque les nombres Q_i sont aussi croissants, on a de même

$$(18') \quad D_{m+n} < D_m \cdot D_n.$$

Les nombres $\bar{a}$ et $\bar{c}$ étant données, on peut choisir à volonté deux nombres a , c , remplissant la condition A , de façon que

$$\frac{\bar{a}}{\bar{c}} = \frac{a}{c}.$$

Par conséquent, les inégalités (17) peuvent s'écrire

$$(19) \quad \frac{\bar{q}^{\frac{m_1-n}{2}} \cdot \bar{D}_{i-m_1} \cdot \bar{D}_{n-1}}{\bar{D}_i} \leq \frac{q^{\frac{m_1-n}{2}} \cdot D_{i-m_1} \cdot D_{n-1}}{D_i}; \quad m_1 \geq n;$$

$$(19') \quad \frac{\bar{q}^{\frac{n-m_2}{2}} \cdot \bar{D}_{i-n} \cdot \bar{D}_{m_2-1}}{\bar{D}_i} \leq \frac{q^{\frac{n-m_2}{2}} \cdot D_{i-n} \cdot D_{m_2-1}}{D_i}; \quad m_2 \leq n.$$

Selon (18) on a

$$\frac{\bar{D}_{i-m_1} \cdot \bar{D}_{n-1}}{\bar{D}_i} \leq \frac{\bar{D}_{i-m_1} \cdot \bar{D}_{n-1}}{\bar{D}_{i-n+1} \cdot \bar{D}_{n-1}} \leq \frac{\bar{D}_{i-m_1}}{\bar{D}_{i-m_1} \cdot \bar{D}_{m_1-n+1}} = \frac{1}{\bar{D}_{m_1-n+1}}.$$

On a en outre selon (18')

$$\frac{D_{i-m_1} \cdot D_{n-1}}{D_i} \geq \frac{D_{i-m_1} \cdot D_{n-1}}{D_{i-n+1} \cdot D_{n-1}} \geq \frac{D_{i-m_1}}{D_{i-m_1} \cdot D_{m_1-n+1}} = \frac{1}{D_{m_1-n+1}}.$$

Les conditions (19) sont donc remplies sans contredit si

$$\begin{aligned} \frac{\bar{q}^{\frac{m_1-n}{2}}}{\bar{D}_{m_1-n+1}} &\leq \frac{q^{\frac{m_1-n}{2}}}{D_{m_1-n+1}}; \quad m_1 \geq n; \\ \frac{\bar{q}^{\frac{n-m_2}{2}}}{\bar{D}_{n-m_2+1}} &\leq \frac{q^{\frac{n-m_2}{2}}}{D_{n-m_2+1}}; \quad m_2 \leq n. \end{aligned}$$

Ces inégalités peuvent s'écrire sous la forme d'une seule

$$(20) \quad \frac{\bar{q}^{\frac{i}{2}}}{\bar{D}_{i+1}} \leq \frac{q^{\frac{i}{2}}}{D_{i+1}}; \quad i \geq 0.$$

Il suffit donc, $\bar{q}$ étant donné, de trouver un nombre $q < \frac{1}{4}$ tel que la condition (20) se trouve remplie.

10. Pour prouver la possibilité de satisfaire à (20) j'étudierai encore une fois les déterminants $\bar{D}_i, D_i$. Soit α une racine de l'équation

$$\alpha^2 + \alpha + q = 0$$

par exemple $\alpha = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - q}$, et multiplions les éléments de la deuxième colonne du déterminant D_{i+1} par α , ceux de la troisième par α^2 etc., puis ajoutons à ceux de la première colonne. On aura donc

$$\begin{aligned} D_{i+1} &= (1 + \alpha) D_i + (-1)^i \alpha^{i-1} (q + \alpha) = \\ &= (1 + \alpha) D_i + (-1)^{i+1} \alpha^{i+1}. \end{aligned}$$

α est un nombre négatif. Posons $\alpha = -\beta$. Par conséquent $\beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - q}$ et

$$\begin{aligned} D_{i+1} &= (1 - \beta) D_i + \beta^{i+1}, \\ D_3 &= (1 - \beta) D_2 + \beta^3, \\ D_2 &= (1 - \beta) D_1 + \beta^2, \\ D_1 &= (1 - \beta) D_0 + \beta \end{aligned}$$

ou finalement

$$D_{i+1} = \beta^{i+2} \frac{1 - \left(\frac{1 - \beta}{\beta}\right)^{i+2}}{2\beta - 1}.$$

En remplaçant q par $-\bar{q}$ ($\bar{q} > 0$) et β par $\beta = \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \bar{q}}$ on obtient de la même manière

$$\bar{D}_{i+1} = \bar{\beta}^{i+2} \frac{1 - \left(\frac{1 - \bar{\beta}}{\bar{\beta}}\right)^{i+2}}{2\bar{\beta} - 1}.$$

Il s'agit d'examiner le rapport

$$\frac{D_{i+1}}{\bar{D}_{i+1}} = \frac{2\bar{\beta} - 1}{2\beta - 1} \cdot \frac{\beta^{i+2}}{\bar{\beta}^{i+2}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1 - \beta}{\beta}\right)^{i+2}}{1 - \left(\frac{1 - \bar{\beta}}{\bar{\beta}}\right)^{i+2}}.$$

Puisque $q > 0$, on a $\bar{\beta} > 1$. On peut choisir le nombre β de façon que

$$(21) \quad \frac{1 - \beta}{\beta} = \frac{\bar{\beta} - 1}{\bar{\beta}}$$

c'est-à-dire

$$(22) \quad \beta = \frac{\bar{\beta}}{2\bar{\beta} - 1}.$$

Pour la valeur obtenue de β on a

$$\frac{1}{2} < \beta < 1,$$

d'où il s'ensuit à son tour que

$$0 < q < \frac{1}{4}.$$

Pour i pair ou impair on aura

$$\frac{D_{i+1}}{D_{i+1}} \leq \frac{2\bar{\beta} - 1}{2\beta - 1} \cdot \frac{\beta^{i+2}}{\bar{\beta}^{i+2}}.$$

Pour que l'inégalité (20) soit vérifiée, il suffit de démontrer que

$$\frac{2\bar{\beta} - 1}{2\beta - 1} \cdot \frac{\beta^{i+2}}{\bar{\beta}^{i+2}} = \left(\frac{q}{\bar{q}} \right)^2 = \left[\frac{\beta(1-\beta)}{\bar{\beta}(\bar{\beta}-1)} \right]^{\frac{i}{2}},$$

ce qui (selon (21)) veut dire

$$\frac{2\beta - 1}{2\bar{\beta} - 1} \cdot \frac{\beta^{i+2}}{\bar{\beta}^{i+2}} = \frac{\beta^i}{\bar{\beta}^i},$$

d'où

$$\frac{2\bar{\beta} - 1}{2\beta - 1} \cdot \frac{\beta^2}{\bar{\beta}^2} = 1.$$

Cela est vrai selon (22).

11. Je ne traite pas les cas où a ou c sont nuls, puisque la méthode de M. GOURSAT (de 1897) s'y laisse généraliser immédiatement¹⁾. Pour $a = c = 0$ le problème est déjà résolu par M. BEUDON²⁾. Le cas où $q = \frac{1}{4}$, c'est-à-dire (en se servant des désignations à la page 38)

$$b^2 - 4ac = 0$$

n'a pas été traité, parce que alors le problème est impossible selon la méthode employée. Car cette méthode exige que le constant A soit positif (Cf. page 40), ce qui n'est pas le

cas si $q = \frac{1}{4}$.

12. Traitons finalement le cas B à savoir $q > \frac{1}{4}$. Selon le §. 10 on aura

¹⁾ Cf. 2) à la page 30.

²⁾ Cf. 3) à la page 30.

$$D_n = \frac{\beta^{n+1} - (1 - \beta)^{n+1}}{2\beta - 1},$$

où

$$\beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - q} = \varrho (\cos \omega + i \sin \omega) ; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Ici ω est le même nombre qu'à la page 39. On obtient

$$D_n = \varrho^n \frac{\sin (n+1) \omega}{\sin \omega}.$$

Si $\frac{\omega}{\pi}$ est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, on a $D_n = 0$, aussi souvent que $\frac{n+1}{q}$ est un nombre entier. Le problème est par conséquent impossible ou, à la rigueur, indéterminé.

Chapitre III.

1. Dans le chapitre précédent j'ai résolu le problème de M. GOURSAT pour une équation aux dérivées partielles du second ordre à un nombre quelconque de variables indépendantes. Peut-on bien résoudre le problème pour une équation d'un ordre quelconque? Il me semble qu'il ne soit pas si facile de répondre à cette question d'une manière générale, mais afin de l'élucider, il serait très important de traiter un problème simple de cette espèce, d'après une méthode indépendante de l'ordre n .

En partant des suppositions analytiques, M. D'ADHÉMAR¹⁾ a trouvé pour l'équation

$$\frac{\delta^3 z}{\delta x^2 \delta y} + a \frac{\delta^3 z}{\delta x \delta y^2} = f(x, y),$$

où a est un constant réel, la solution qui se réduit à des valeurs données sur trois lignes droites, toutes passant par le même point, par exemple l'origine. Excepté les conditions de possibilité que l'on peut géométriquement prévoir, il en peut aussi exister d'autres, se rapportant aux positions réciproques des lignes et des caractéristiques²⁾. Mais c'est seulement pour le cas où toutes les trois lignes sont situées entre deux caractéristiques voisines que M. D'ADHÉMAR trouva que le problème était tout à fait délivré de ces dernières conditions³⁾. Soit en remplaçant le constant a par une fonction de x et y , soit en remplaçant les lignes droites par des courbes quelconques, soit en laissant le second membre contenir z et les dérivées d'ordre un et deux, tous ces efforts de généraliser les résultats de M. D'ADHÉMAR ne semblent pas être sans difficultés. M. D'ADHÉMAR nous a promis un mémoire traitant ces questions, mais malheureusement il n'a pas encore été publié.

L'ouvrage de M. D'ADHÉMAR m'amène à résoudre sous des suppositions analytiques le problème de M. GOURSAT pour l'équation

$$(1) \quad \sum_{p=0}^n A_p \frac{\delta^n z}{\delta x^p \delta y^{n-p}} = f(x, y),$$

¹⁾ Journal de Mathématiques VI^{ème} série t. V. p. 293.

²⁾ Il y en a trois cas (excepté les cas triviaux):

A. toutes les trois lignes sont situées entre deux caractéristiques voisines,

B. deux lignes sont situées dans un angle des caractéristiques, la troisième dans un autre angle des caractéristiques,

C. une ligne est située dans chacun des trois angles des caractéristiques.

M. D'ADHÉMAR a fait de B deux cas différents, ce qui n'est pas nécessaire, mais il n'a pas traité C.

³⁾ Le cas C n'est pas douteux non plus. On peut s'en convaincre aisément.

où A_p sont des constants réels. Elle est supposée d'avoir n caractéristiques réelles et distinctes passant par chaque point. Je cherche la solution de (1) qui prend des valeurs données sur n lignes droites passant par l'origine et qui sont toutes situées entre deux caractéristiques voisines.

Comme l'équation (1) a n caractéristiques réelles et distinctes, on peut aussi dire que l'équation homogène

$$(2) \quad \sum_{p=0}^n A_p y^p x^{n-p} = 0$$

est satisfaite par n valeurs réelles et distinctes du rapport $\frac{y}{x}$. Si nous désignons ces valeurs par $a, b, \dots$, les équations des caractéristiques passant par l'origine sont

$$(3) \quad y = -ax ; y = -bx ; \dots$$

Faisons la transformation

$$(4) \quad \xi = y + ax ; \eta = y + bx.$$

L'équation homogène correspondant à (2) devient

$$(5) \quad \sum_{p=0}^n A_p (a\eta + b\xi)^p (\eta + \xi)^{n-p} = 0.$$

Cette équation est satisfaite par

$$\frac{a\eta + b\xi}{\eta + \xi} = a ; \frac{a\eta + b\xi}{\eta + \xi} = b ; \dots,$$

c'est-à-dire par

$$(6) \quad \xi = 0 ; \quad \eta = 0 ; \dots$$

Il s'ensuit que l'équation transformée ne contient pas $\frac{\delta^n z}{\delta \xi^n}$ et $\frac{\delta^n z}{\delta \eta^n}$. L'équation (1) est ainsi transformée à

$$(7) \quad \sum_{p=1}^{n-1} B_p \frac{\delta^n z}{\delta \xi^p \delta \eta^{n-p}} = F(\xi, \eta).$$

En posant

$$u = \frac{\delta^2 z}{\delta \xi \delta \eta},$$

on obtient

$$(9) \quad \sum_{p=0}^{n-2} C_p \frac{\delta^{n-2} u}{\delta \xi^p \delta \eta^{n-2-p}} = F(\xi, \eta).$$

Cette équation est de l'ordre $n-2$ et a $n-2$ caractéristiques réelles et distinctes. En continuant de cette façon, on arrive finalement à une équation du premier ou du second ordre. Il s'ensuit alors que l'on peut toujours trouver une solution spéciale de l'équation (1).

Il suffit donc de chercher pour l'équation

$$(10) \quad \sum_{p=0}^n A_p \frac{\delta^n z}{\delta x^p \delta y^{n-p}} = 0,$$

la solution qui prend des valeurs données sur les lignes en question. Selon la transformation (4) on peut choisir comme l'axe des x et des y les caractéristiques entre lesquelles toutes les lignes données sont situées. Le problème posé est donc le suivant:

Soit donnée l'équation

$$(11) \quad A_1 \frac{\delta^n z}{\delta x \delta y^{n-1}} + A_2 \frac{\delta^n z}{\delta x^2 \delta y^{n-2}} + \dots + A_{n-1} \frac{\delta^n z}{\delta x^{n-1} \delta y} = 0,$$

où A_p sont des constants réels. Elle a n caractéristiques réelles et distinctes

$$(12) \quad x = 0; \quad y = 0; \quad y = -a_1 x; \quad y = -a_2 x; \quad \dots; \quad y = -a_{n-2} x,$$

où a_p sont des nombres positifs. Je cherche la solution de (11) qui prend des valeurs données sur n lignes droites

$$(13) \quad y = a_1 x; \quad y = a_2 x; \quad \dots; \quad y = a_n x,$$

où a_p sont des nombres positifs. Les fonctions données sont supposées analytiques.

Comme je viens de le dire, ce problème a été traité par M. d'ADHÉMAR si $n = 3^1$. Sa méthode ne se laisse pas généraliser. D'abord je résouds le problème si $n = 4$, et après cela je généralise la méthode au cas où $n = 5$ et des nombres plus élevés.

2. Alors nous supposons que l'équation

$$(14) \quad A_1 \frac{\delta^4 z}{\delta x \delta y^3} + A_2 \frac{\delta^4 z}{\delta x^2 \delta y^2} + A_3 \frac{\delta^4 z}{\delta x^3 \delta y} = 0,$$

où A_p sont des constants réels, a quatre caractéristiques réelles et distinctes

$$x = 0; \quad y = 0; \quad y = -ax; \quad y = -bx,$$

où

$$(15) \quad 0 < a < b.$$

Je cherche la solution de (14) qui se réduit à $f_1(x); f_2(x); f_3(x); f_4(x)$ sur quatre lignes droites

$$y = ax; \quad y = \beta x; \quad y = \gamma x; \quad y = \delta x,$$

où

$$(16) \quad 0 < a < \beta < \gamma < \delta.$$

La solution générale de (14) est de la forme

$$z = F(x) + G(y) + \varphi(y + ax) + \psi(y + bx).$$

¹⁾ Cf. d'ADHÉMAR l. c. p. 311—314.

Il s'agit de déterminer les fonctions F , G , φ et ψ à l'aide des équations suivantes:

$$(17) \quad \begin{cases} f_1(x) = F_x + G_{ax} + \varphi_{(a+a)x} + \psi_{(a+b)x} \\ f_2(x) = F_x + G_{\beta x} + \varphi_{(\beta+a)x} + \psi_{(\beta+b)x} \\ f_3(x) = F_x + G_{\gamma x} + \varphi_{(\gamma+a)x} + \psi_{(\gamma+b)x} \\ f_4(x) = F_x + G_{\delta x} + \varphi_{(\delta+a)x} + \psi_{(\delta+b)x} \end{cases}$$

Ici nous écrivons selon M. d'ADHÉMAR¹⁾

$$F_x = F(x); \quad G_{ax} = G(ax); \quad \varphi_{(a+a)x} = \varphi[(a+a)x]; \dots$$

Ayant

$$\begin{vmatrix} 1, a, a+a, a+b \\ 1, \beta, \beta+a, \beta+b \\ 1, \gamma, \gamma+a, \gamma+b \\ 1, \delta, \delta+a, \delta+b \end{vmatrix} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{23} - a_{24}$$

nous écrivons

$$\psi\psi \begin{vmatrix} 1, a, a+a, a+b \\ 1, \beta, \beta+a, \beta+b \\ 1, \gamma, \gamma+a, \gamma+b \\ 1, \delta, \delta+a, \delta+b \end{vmatrix} x = \psi_{a_1x} - \psi_{a_2x} + \dots + \psi_{a_{23}x} - \psi_{a_{24}x}.$$

Nous tirons de (17)

$$(18) \quad \psi\psi \begin{vmatrix} 1, a, a+a, a+b \\ 1, \beta, \beta+a, \beta+b \\ 1, \gamma, \gamma+a, \gamma+b \\ 1, \delta, \delta+a, \delta+b \end{vmatrix} x = -f_1f_1 \begin{vmatrix} 1, \beta, \beta+a \\ 1, \gamma, \gamma+a \\ 1, \delta, \delta+a \end{vmatrix} x + f_2f_2 \begin{vmatrix} 1, a, a+a \\ 1, \gamma, \gamma+a \\ 1, \delta, \delta+a \end{vmatrix} x - \\ - f_3f_3 \begin{vmatrix} 1, a, a+a \\ 1, \beta, \beta+a \\ 1, \delta, \delta+a \end{vmatrix} x + f_4f_4 \begin{vmatrix} 1, a, a+a \\ 1, \beta, \beta+a \\ 1, \gamma, \gamma+a \end{vmatrix} x$$

d'où il faut déterminer ψ . Pour F , G , φ on aura des équations similaires. De l'autre côté, il est facile à comprendre que ces fonctions F ; G ; φ ; ψ satisfont non seulement à ces dernières équations mais aussi aux équations (17).

3. Comme les fonctions f sont supposées analytiques, il s'agit de résoudre une équation de la forme

$$(19) \quad \psi_{a_1x} - \psi_{a_2x} + \psi_{a_3x} - \dots - \psi_{a_{24}x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

¹⁾ l. c. p. 299.

Soit

$$(20) \quad \psi_x = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots$$

une solution de (19). On a

$$(21) \quad C_n (a_1^n - a_2^n + a_3^n - \dots - a_{24}^n) = A_n.$$

Si $n = 0$, il faut que

$$A_0 = 0.$$

Il s'ensuit de (18) que cette condition est remplie quelles que soient les fonctions f .

Si $n = 1$, on aura

$$C_1 (a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{24}) = A_1.$$

Le déterminant entre les parenthèses est nul. Il faut que

$$A_1 = 0.$$

Cette condition aussi est remplie quelles que soient les fonctions f , car les déterminants du type

$$\begin{vmatrix} 1, & \beta, & \beta + a \\ 1, & \gamma, & \gamma + a \\ 1, & \delta, & \delta + a \end{vmatrix} = 0.$$

Si $n = 2$, on obtient

$$C_2 (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \dots - a_{24}^2) = A_2.$$

Le déterminant entre les parenthèses

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha^2, & (\alpha + a)^2, & (\alpha + b)^2 \\ 1, & \beta^2, & (\beta + a)^2, & (\beta + b)^2 \\ 1, & \gamma^2, & (\gamma + a)^2, & (\gamma + b)^2 \\ 1, & \delta^2, & (\delta + a)^2, & (\delta + b)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il faut que

$$A_2 = 0.$$

On comprend facilement que cette condition est remplie. Car

$$(22) \quad \begin{cases} f_1''(0) = r_0 + 2s_0 \alpha + t_0 \alpha^2 \\ f_2''(0) = r_0 + 2s_0 \beta + t_0 \beta^2 \\ f_3''(0) = r_0 + 2s_0 \gamma + t_0 \gamma^2 \\ f_4''(0) = r_0 + 2s_0 \delta + t_0 \delta^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} r &= \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \\ s &= \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} \\ t &= \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} \end{aligned}$$

d'où

$$f_1''(0) \cdot \begin{vmatrix} 1, \beta, \beta^2 \\ 1, \gamma, \gamma^2 \\ 1, \delta, \delta^2 \end{vmatrix} - f_2''(0) \cdot \begin{vmatrix} 1, \alpha, \alpha^2 \\ 1, \gamma, \gamma^2 \\ 1, \delta, \delta^2 \end{vmatrix} + f_3''(0) \cdot \begin{vmatrix} 1, \alpha, \alpha^2 \\ 1, \beta, \beta^2 \\ 1, \delta, \delta^2 \end{vmatrix} - f_4''(0) \cdot \begin{vmatrix} 1, \alpha, \alpha^2 \\ 1, \beta, \beta^2 \\ 1, \gamma, \gamma^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation veut dire que $A_2 = 0$.

Les autres C_n sont calculés d'après (21), et on obtient une solution analytique de (19) si l'on peut montrer que

$$(23) \quad F(n) = \alpha_1^n - \alpha_2^n + \alpha_3^n - \dots - \alpha_{24}^n \neq 0$$

si $n \geq 3$.

Avant de démontrer ce théorème, je déterminerai les constants arbitraires C_0, C_1 et C_2 .

4. Supposé que (23) soit, j'ai donc trouvé des solutions

$$F(x) = C_0^{(F)} + C_1^{(F)}x + C_2^{(F)}x^2 + \dots + C_n^{(F)}x^n + \dots$$

$$\psi(x) = C_0^{(\psi)} + C_1^{(\psi)}x + C_2^{(\psi)}x^2 + \dots + C_n^{(\psi)}x^n + \dots$$

satisfaisant aux équations du type (18). Il s'agit de déterminer les constants

$$C_0^{(F)}, C_1^{(F)}, C_2^{(F)},$$

$$C_0^{(\psi)}, C_1^{(\psi)}, C_2^{(\psi)},$$

qui ont été arbitraires jusqu'ici.

Naturellement on peut supposer

$$f_1(\cdot) = f_2(\cdot) = f_3(0) = f_4(\cdot) = 0.$$

La solution remplit cette condition si

$$C_0^{(F)} = C_0^{(G)} = C_0^{(\varphi)} = C_0^{(\psi)} = 0.$$

Pour déterminer les constants C_1 on a

$$(24) \quad \begin{cases} f_1'(\cdot) = C_1^{(F)} + aC_1^{(G)} + (a+a)C_1^{(\varphi)} + (a+b)C_1^{(\psi)}, \\ f_4'(\cdot) = C_1^{(F)} + \delta C_1^{(G)} + (\delta+a)C_1^{(\varphi)} + (\delta+b)C_1^{(\psi)}. \end{cases}$$

En comparant ces équations aux conditions géométriquement nécessaires

$$f_1'(0) = p_0 + aq_0,$$

$$f_4'(0) = p_0 + \delta q_0,$$

on comprend que ces équations sont satisfaites en posant

$$C_1^{(F)} = p_0; C_1^{(G)} = q_0; C_1^{(\varphi)} = 0; C_1^{(\psi)} = 0.$$

Le théorème (23) est donc démontré si l'on peut prouver que pour chaque

$$p < q < n \quad \text{où } n \geq 3,$$

le second déterminant de (25) a toujours le même signe, c'est-à-dire si l'on peut prouver que

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha^{n-q}, & \alpha^{n-p}, & \alpha^n \\ 1, & \beta^{n-q}, & \beta^{n-p}, & \beta^n \\ 1, & \gamma^{n-q}, & \gamma^{n-p}, & \gamma^n \\ 1, & \delta^{n-q}, & \delta^{n-p}, & \delta^n \end{vmatrix} > 0.$$

6. Il reste donc à démontrer que le déterminant

$$G(l, m, n) = \begin{vmatrix} 1, & \alpha^l, & \alpha^m, & \alpha^n \\ 1, & \beta^l, & \beta^m, & \beta^n \\ 1, & \gamma^l, & \gamma^m, & \gamma^n \\ 1, & \delta^l, & \delta^m, & \delta^n \end{vmatrix} > 0$$

si

$$0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta \quad [\text{d'après (16)}]$$

$$l < m < n$$

et

$$n \geq 3.$$

Je transcris

$$\begin{aligned} G(l, m, n) &= \begin{vmatrix} 1, & \alpha^l & \alpha^m & \alpha^n \\ 0, & \beta^l - \alpha^l, & \beta^m - \alpha^m, & \beta^n - \alpha^n \\ 0, & \gamma^l - \alpha^l, & \gamma^m - \alpha^m, & \gamma^n - \alpha^n \\ 0, & \delta^l - \alpha^l, & \delta^m - \alpha^m, & \delta^n - \alpha^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta^l - \alpha^l, & \beta^m - \alpha^m, & \beta^n - \alpha^n \\ \gamma^l - \alpha^l, & \gamma^m - \alpha^m, & \gamma^n - \alpha^n \\ \delta^l - \alpha^l, & \delta^m - \alpha^m, & \delta^n - \alpha^n \end{vmatrix} = \\ &= (\beta - \alpha) (\gamma - \alpha) (\delta - \alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \beta^{l-1} + \beta^{l-2} \alpha + \dots + \alpha^{l-1}, & \beta^{m-1} + \beta^{m-2} \alpha + \dots + \alpha^{m-1}, & \beta^{n-1} + \beta^{n-2} \alpha + \dots + \alpha^{n-1} \\ \gamma^{l-1} + \gamma^{l-2} \alpha + \dots + \alpha^{l-1}, & \gamma^{m-1} + \gamma^{m-2} \alpha + \dots + \alpha^{m-1}, & \gamma^{n-1} + \gamma^{n-2} \alpha + \dots + \alpha^{n-1} \\ \delta^{l-1} + \delta^{l-2} \alpha + \dots + \alpha^{l-1}, & \delta^{m-1} + \delta^{m-2} \alpha + \dots + \alpha^{m-1}, & \delta^{n-1} + \delta^{n-2} \alpha + \dots + \alpha^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le coefficient du déterminant est > 0 . Je transforme le déterminant en retranchant la deuxième colonne, multipliée par α^{n-m} , de la troisième, et la première colonne, multipliée par α^{m-l} , de la deuxième, et j'obtiens

$$G(l, m, n) =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta^{l-1} + \beta^{l-2} \alpha + \dots + \alpha^{l-1}, & \beta^{m-1} + \beta^{m-2} \alpha + \dots + \beta^l \alpha^{m-l-1}, & \beta^{n-1} + \beta^{n-2} \alpha + \dots + \beta^m \alpha^{n-m-1} \\ \gamma^{l-1} + \gamma^{l-2} \alpha + \dots + \alpha^{l-1}, & \gamma^{m-1} + \gamma^{m-2} \alpha + \dots + \gamma^l \alpha^{m-l-1}, & \gamma^{n-1} + \gamma^{n-2} \alpha + \dots + \gamma^m \alpha^{n-m-1} \\ \delta^{l-1} + \delta^{l-2} \alpha + \dots + \alpha^{l-1}, & \delta^{m-1} + \delta^{m-2} \alpha + \dots + \delta^l \alpha^{m-l-1}, & \delta^{n-1} + \delta^{n-2} \alpha + \dots + \delta^m \alpha^{n-m-1} \end{vmatrix}.$$

Il importe donc à démontrer que les déterminants du type

$$\begin{vmatrix} 1, & \beta^p, & \beta^q \\ 1, & \gamma^p, & \gamma^q \\ 1, & \delta^p, & \delta^q \end{vmatrix} > 0$$

si

$$p < q$$

et

$$q \geq 2.$$

De la même manière que tout à l'heure, cela est établi si les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1, & \gamma^s \\ 1, & \delta^s \end{vmatrix} > 0$$

lorsque

$$s \geq 1,$$

ce qui s'entend de soi-même.

7. Avant de passer à l'équation du cinquième ordre ou de l'ordre plus élevé, je formule le *théorème général* qui suit, et dont l'épreuve se dérive du paragraphe précédent.

Chaque déterminant

$$(26) \quad \begin{vmatrix} 1, & a_1^{m_1}, & a_1^{m_2}, & \dots, & a_1^{m_n-1} \\ 1, & a_2^{m_1}, & a_2^{m_2}, & \dots, & a_2^{m_n-1} \\ \hline 1, & a_n^{m_1}, & a_n^{m_2}, & \dots, & a_n^{m_n-1} \end{vmatrix} > 0$$

si pour les nombres positifs a , on a

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n,$$

et si pour les nombres entiers positifs m , on a

$$m_1 < m_2 < \dots < m_{n-1},$$

où

$$m_{n-1} \geq n - 1.$$

8. J'ajoute encore quelques réflexions quant à l'équation du quatrième ordre. Si $a = 0$, c'est-à-dire si l'une des lignes données est une caractéristique de l'équation (14), ma tâche n'en sera que plus simple.

Alors on a

$$F(n) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & a^n, & b^n \\ 1, & \beta^n, & (\beta + a)^n, & (\beta + b)^n \\ 1, & \gamma^n, & (\gamma + a)^n, & (\gamma + b)^n \\ 1, & \delta^n, & (\delta + a)^n, & (\delta + b)^n \end{vmatrix},$$

et il s'agit de discuter le signe des déterminants du type

$$\begin{vmatrix} 1, 0, 0, 0 \\ 1, \beta^n, \beta^{n-p}, \beta^{n-q} \\ 1, \gamma^n, \gamma^{n-p}, \gamma^{n-q} \\ 1, \delta^n, \delta^{n-p}, \delta^{n-q} \end{vmatrix}.$$

Si $a = 0$ et $\delta = \infty$, c'est-à-dire si deux des lignes données sont des caractéristiques de l'équation (14), on a

$$F(n) = \begin{vmatrix} 1, 0, a^n, b^n \\ 1, \beta^n, (\beta + a)^n, (\beta + b)^n \\ 1, \gamma^n, (\gamma + a)^n, (\gamma + b)^n \\ 0, 1, 1, 1 \end{vmatrix},$$

ce qui se transcrit

$$F(n) =$$

$$\begin{vmatrix} 1, 0, a^n, b^n \\ 1, \beta^n, \beta^n + c_p \beta^{n-p} a^p + c_q \beta^{n-q} a^q + a^n, \beta^n + c_p \beta^{n-p} b^p + c_q \beta^{n-q} b^q + b^n \\ 1, \gamma^n, \gamma^n + c_p \gamma^{n-p} a^p + c_q \gamma^{n-q} a^q + a^n, \gamma^n + c_p \gamma^{n-p} b^p + c_q \gamma^{n-q} b^q + b^n \\ 0, 1, 1, 1 \end{vmatrix}$$

après quoi, conformément au paragraphe 5, toutes les difficultés sont surmontées.

9. Pour que le problème posé dans le paragraphe 1 soit soluble pour une équation du cinquième ordre, il suffit de démontrer que le déterminant

$$F(n) = \begin{vmatrix} 1, \alpha^n, (\alpha + a)^n, (\alpha + b)^n, (\alpha + c)^n \\ 1, \beta^n, (\beta + a)^n, (\beta + b)^n, (\beta + c)^n \\ 1, \gamma^n, (\gamma + a)^n, (\gamma + b)^n, (\gamma + c)^n \\ 1, \delta^n, (\delta + a)^n, (\delta + b)^n, (\delta + c)^n \\ 1, \varepsilon^n, (\varepsilon + a)^n, (\varepsilon + b)^n, (\varepsilon + c)^n \end{vmatrix},$$

où $0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ et $0 < a < b < c$, a le même signe pour tous les $n \geq 4$.
Je transcris le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1, \alpha^n, c_p \alpha^{n-p} a^p + c_q \alpha^{n-q} a^q + c_r \alpha^{n-r} a^r + \dots + c_p \alpha^{n-p} c^p + c_q \alpha^{n-q} c^q + c_r \alpha^{n-r} c^r + \dots \\ 1, \beta^n, \dots \\ 1, \gamma^n, \dots \\ 1, \delta^n, \dots \\ 1, \varepsilon^n, \dots \end{vmatrix}.$$

On aura comme le coefficient de $c_p c_q c_r$ où $p < q < r$,

$$(27) \begin{vmatrix} 1, & \alpha^n, & \alpha^{n-p}, & \alpha^{n-q}, & \alpha^{n-r} \\ 1, & \beta^n, & \beta^{n-p}, & \beta^{n-q}, & \beta^{n-r} \\ 1, & \gamma^n, & \gamma^{n-p}, & \gamma^{n-q}, & \gamma^{n-r} \\ 1, & \delta^n, & \delta^{n-p}, & \delta^{n-q}, & \delta^{n-r} \\ 1, & \varepsilon^n, & \varepsilon^{n-p}, & \varepsilon^{n-q}, & \varepsilon^{n-r} \end{vmatrix} \cdot (a^p b^q c^r - a^p b^r c^q - a^q b^p c^r + a^q b^r c^p + a^r b^p c^q - a^r b^q c^p).$$

Selon le théorème (26), le déterminant a pour tous les n, p, q, r le même signe. D'après ce théorème, cela est vrai aussi pour l'expression entre les parenthèses, qui est identique au déterminant

$$\begin{vmatrix} a^p, & a^q, & a^r \\ b^p, & b^q, & b^r \\ c^p, & c^q, & c^r \end{vmatrix}.$$

Ce fait se laisse aisément démontrer, car en partant de l'expression

$$a^p b^q c^r,$$

il s'agit, pour former le déterminant, de permuter p, q, r . En faisant cela, on doit obtenir le signe + après un nombre pair de permutations, et le signe — après un nombre impair.

En comparant (25) et (27), on comprend maintenant que le problème général aux limites pour l'équation (11) pour sa solution n'est dépendant que du théorème (26).

Chapitre IV.

1. Naturellement il serait à désirer que le même problème qu'au chapitre précédent fût traité pour une équation d'une forme plus générale et pour des courbes quelconques, en supposant seulement les fonctions données continues. Ce n'est que M. COLOMBO qui ait fait une généralisation de cette nature¹⁾. Il trouva pour l'équation

$$(1) \quad \frac{\delta^3 z}{\delta x^2 \delta y} - a \frac{\delta^3 z}{\delta x \delta y^2} = f(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

où a est un constant réel, la solution qui prend des valeurs données sur deux caractéristiques et sur une troisième courbe passant par le point d'intersection de ces caractéristiques. Alors il ne faut plus que cette courbe soit une ligne droite. Si la courbe est identique à la troisième caractéristique, le problème est impossible. Je vais maintenant traiter le même problème pour le cas où a n'est plus un constant mais une fonction de x et y . Bien entendu, on peut supposer le second membre linéaire par rapport à z et ses dérivées partielles puisque le cas général, sous les conditions de LIPSCHITZ, n'offre pas de difficultés plus grandes. Considérons alors l'équation

$$(2) \quad \Delta(z) = \frac{\delta^3 z}{\delta x^2 \delta y} - a(x, y) \frac{\delta^3 z}{\delta x \delta y^2} = F(z) + e(x, y),$$

où

$$F(z) = b_{20} \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + b_{11} \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} + b_{02} \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} + c_{10} \frac{\delta z}{\delta x} + c_{01} \frac{\delta z}{\delta y} + dz.$$

Tous les coefficients a, b, c, d et e sont supposés continus ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre²⁾. Je cherche la solution de l'équation (2) continue ainsi que les dérivées partielles jusqu'à troisième ordre et qui se réduit à nul sur l'axe des x , des y et sur une courbe donnée

$$y = a(x)$$

passant par l'origine. Cette courbe n'est rencontrée qu'en un point par une caractéristique

¹⁾ M. COLOMBO a résumé ses résultats dans Rendiconti della Acc. dei Lincei V. 33, 2° semestre, p. 156.

²⁾ Pour a je vais faire plus tard encore des suppositions (voir § 8).

qui existe à l'intérieur de Γ et qui remplit les conditions données aux limites. En outre, cette solution est continue ainsi que ses dérivées jusqu'au troisième ordre, et satisfait aux inégalités

$$(6) \quad \begin{aligned} & |z| < MKl^{p+3}, \\ & \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|; \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < MKl^{p+2}, \\ & \left| \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|; \left| \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|; \left| \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right| < MKl^{p+1}, \\ & \left| \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right|; \left| \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \right|; \left| \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \right|; \left| \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right| < MKl^p, \end{aligned}$$

où le constant K est indépendant de p .

Remarque: Si

$$|G(x, y)|; |G'_x(x, y)|; |G'_y(x, y)| < M,$$

p doit être égal à nul dans les formules (6).

3. L'équation (5) a une solution de la forme

$$z' = \int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_0^{\xi} G(\zeta, g(\zeta, f(\xi, \eta))) d\zeta.$$

On en obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial x} &= \int_0^y d\eta \int_0^x G(\zeta, g(\zeta, f(x, \eta))) d\zeta; \quad \frac{\partial z'}{\partial y} = \int_0^x d\xi \int_0^{\xi} G(\zeta, g(\zeta, f(\xi, y))) d\zeta; \\ \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} &= \int_0^y G(x, \eta) d\eta + a(x, y) \int_0^x G(\zeta, g(\zeta, f(x, y))) d\zeta - a(x, 0) \int_0^x G(\zeta, g(\zeta, f(x, 0))) d\zeta \\ &\quad - \int_0^x d\zeta \int_0^y G(\zeta, g(\zeta, f(x, \eta))) a'_\eta(x, \eta) d\eta; \\ \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} &= \int_0^x G(\zeta, g(\zeta, f(x, y))) d\zeta; \\ \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} &= \frac{1}{a(x, y)} \cdot \int_0^x G(\zeta, g(\zeta, f(x, y))) d\zeta - \int_0^x G(\zeta, y) \frac{d\zeta}{a(\zeta, y)} + \\ &\quad + \int_0^x d\zeta \int_\zeta^x G(\zeta, g(\zeta, f(\xi, y))) \frac{a'_\xi(\xi, y)}{[a(\xi, y)]^2} d\xi; \\ \frac{\partial^3 z'}{\partial x^2 \partial y} &= G(x, y) + \int_0^x G'_g(\zeta, g(\zeta, f(x, y))) g'_f(\zeta, f(x, y)) f'_x(x, y) d\zeta; \\ \frac{\partial^3 z'}{\partial x \partial y^2} &= \int_0^x G'_g(\zeta, g(\zeta, f(x, y))) g'_f(\zeta, f(x, y)) f'_y(x, y) d\zeta. \end{aligned}$$

Le lecteur est prié de calculer lui-même les dérivées $\frac{\partial^3 z'}{\partial x^3}$ et $\frac{\partial^3 z'}{\partial y^3}$ qui dépendent de G , G'_x et G'_y ¹⁾. Puisque $y \leq t$ et $\frac{x}{t}$ est limité à l'intérieur de Γ , on obtient selon (4) pour z' et ses dérivées, toutes existant à l'intérieur de ce domaine, des inégalités de la forme (6). Si l'on pose

$$z'(x, a(x)) = F(x),$$

$F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$ sont continues à l'intérieur de Γ et satisfont aux inégalités

$$(7) \quad \begin{aligned} |F'(x)| &< MK_1 [f(x, a(x))]^{p+2}, \\ |F''(x)| &< MK_1 [f(x, a(x))]^{p+1}, \\ |F'''(x)| &< MK_1 [f(x, a(x))]^p. \end{aligned}$$

4. L'équation

$$\Delta(z) = 0$$

a une solution

$$z'' = \int_0^x \psi(f(\xi, y)) g'_f(\xi, f(\xi, y)) d\xi - \int_0^x \psi(f(\xi, 0)) g'_f(\xi, f(\xi, 0)) d\xi - \int_0^x d\xi \int_{f(\xi, 0)}^{f(\xi, y)} \psi(\zeta) g''_{\zeta^2}(\xi, \zeta) d\zeta$$

qui se réduit à nul pour $x = 0$ et pour $y = 0$, quelle que soit la fonction $\psi^2)$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial z''}{\partial x} &= \psi(f(x, y)) g'_f(x, f(x, y)) - \psi(f(x, 0)) g'_f(x, f(x, 0)) - \int_{f(x, 0)}^{f(x, y)} \psi(\zeta) g''_{\zeta^2}(x, \zeta) d\zeta, \\ \frac{\partial z''}{\partial y} &= \psi(f(x, y)) \frac{g'_f(x, f(x, y))}{a(x, y)} - \psi(f(0, y)) \frac{g'_f(0, f(0, y))}{a(0, y)} - \\ &- \int_0^x \psi(f(\xi, y)) \frac{[g''_{\xi f}(\xi, f(\xi, y)) + g''_{f^2}(\xi, f(\xi, y)) f'_\xi(\xi, y)] a(\xi, y) - a'_\xi(\xi, y) g'_f(\xi, f(\xi, y))}{[a(\xi, y)]^2} d\xi, \\ \frac{\partial^2 z''}{\partial x \partial y} &= \psi'(f(x, y)) f'_y(x, y) g'_f(x, f(x, y)). \end{aligned}$$

Selon le paragraphe 1

$$t = f(x, g(x, t)),$$

d'où

$$1 = f'_g(x, g(x, t)) g'_t(x, t)$$

ou

$$(8) \quad f'_y(x, y) g'_f(x, f(x, y)) = 1$$

et donc

¹⁾ Pour qu'il soit permis de former les dérivées ci-dessus, il faut que $a'_x(x, y)$; $a'_y(x, y)$; $a''_{xy}(x, y)$; $g'_t(x, t)$; $f'_x(x, y)$; $f'_y(x, y)$ soient continues.

²⁾ Cette formule contient le fait bien connu qu'une solution de l'équation $\Delta(z) = 0$ est complètement déterminée si l'on connaît ses valeurs sur les axes des x et des y , ainsi que $\frac{\partial z}{\partial x}$ le long de l'axe des y . Cf. LE ROUX: Journal de Math. série V:4 p. 378.

$$\frac{\delta^3 z''}{\delta x \delta y} = \psi' (f(x, y)).$$

En outre,

$$\frac{\delta^3 z''}{\delta x^2 \delta y} = \psi'' (f(x, y)) f'_x(x, y),$$

$$\frac{\delta^3 z''}{\delta x \delta y^2} = \psi'' (f(x, y)) f'_y(x, y).$$

Le lecteur est prié de calculer lui-même les dérivées $\frac{\delta^3 z''}{\delta x^2}, \frac{\delta^3 z''}{\delta y^2}$ qui dépendent de ψ et ψ' et aussi les dérivées $\frac{\delta^3 z''}{\delta x^3}, \frac{\delta^3 z''}{\delta y^3}$ qui dépendent de ψ, ψ' et ψ'' . On voit aisément que, si pour $t \leq t_M$

$$(9) \quad \begin{aligned} |\psi(t)| &< MK_2 t^{p+2}, \\ |\psi'(t)| &< MK_2 t^{p+1}, \\ |\psi''(t)| &< MK_2 t^p \end{aligned}$$

z'' et ses dérivées existent à l'intérieur du domaine I et satisfont aux inégalités de la forme (6). La solution

$$z = z' - z''$$

de l'équation (5) satisfait aussi aux mêmes inégalités.

5. Il nous reste donc de démontrer que l'équation

$$(10) \quad \begin{aligned} \int_0^x \psi(f(\xi, \alpha(x))) g'_f(\xi, f(\xi, \alpha(x))) d\xi - \int_0^x \psi(f(\xi, 0)) g'_f(\xi, f(\xi, 0)) d\xi - \\ - \int_0^x d\xi \int_{f(\xi, 0)}^{f(\xi, \alpha(x))} \psi(\xi) g''_{\xi^2}(\xi, \xi) d\xi = F(x), \end{aligned}$$

où $F(x)$, comme je viens de le dire, remplit les inégalités (7), a une solution $\psi(t)$, continue aussi bien que ses dérivées du premier et du second ordre quand $t \leq t_M$, et remplissant les inégalités (9). Si nous appelons par x_M l'abscisse du point d'intersection entre $y = \alpha(x)$ et $y = g(x, t_M)$, l'équation doit être satisfaite pour $0 \leq x \leq x_M$.

Puisque $F(0) = 0$ et aussi le premier membre de l'équation (10) est nul pour $x = 0$, il suffit de résoudre l'équation que l'on obtient en différentiant par rapport à x les deux membres de l'équation (10), à savoir

$$\begin{aligned} \psi(f(x, \alpha(x))) g'_f(x, f(x, \alpha(x))) - \psi(f(x, 0)) g'_f(x, f(x, 0)) + \\ + \int_0^x \psi'(f(\xi, \alpha(x))) f'_{\alpha(x)}(\xi, \alpha(x)) \alpha'(x) g'_f(\xi, f(\xi, \alpha(x))) d\xi - \int_{f(x, 0)}^{f(x, \alpha(x))} \psi(\xi) g''_{\xi^2}(x, \xi) d\xi = F'(x). \end{aligned}$$

¹⁾ Pour qu'il soit permis de former ces dérivées, il faut que $a''_{y^2}(x, y), a'''_{xy^2}(x, y), g''_{xt}(x, t), g'''_{t^2}(x, t), g'''_{x^2t}(x, t), g'''_{xt^2}(x, t), g''''_{x^2t^2}(x, t), g''''_{xt^3}(x, t), g''''_{t^4}(x, t), f'_{x^2}(x, y), f'_{xy}(x, y), f''_{y^2}(x, y), f'''_{xy^2}(x, y)$ soient continues.

Selon (8) on peut simplifier la première intégrale, et ensuite l'intégrer par parties. En posant

$$\begin{aligned} g'_f(x, f(x, a(x))) + \frac{\alpha'(x)}{f'_x(x, a(x))} &= C(x), \\ \frac{g'_f(x, f(x, 0))}{C(x)} &= A(x), \\ \frac{\alpha'(x)}{f'_0(0, a(x)) C(x)} &= B(x), \\ \frac{\alpha'(x) f''_{\xi_2}(\xi, a(x))}{[f'_\xi(\xi, a(x))]^2 C(x)} &= D(\xi, x), \\ \frac{g''_{\xi_2}(x, \xi)}{C(x)} &= E(\xi, x), \end{aligned}$$

on aura l'équation

$$(11) \quad \begin{aligned} \psi(f(x, a(x))) - A(x) \psi(f(x, 0)) - B(x) \psi(f(0, a(x))) &= \frac{F'(x)}{C(x)} - \\ - \int_0^x D(\xi, x) \psi(f(\xi, a(x))) d\xi + \int_{f(x, 0)}^{f(x, a(x))} E(\xi, x) \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Toutes les fonctions A, B, D, E et $\frac{F'}{C}$ sont continues pour

$$(12) \quad 0 \leq x \leq x_M,$$

car on a

$$g'_f(0, f(0, y)) = 1; g'_f(0, f(0, 0)) = 1,$$

d'où selon (8)

$$f'_y(0, y) = 1; f'_y(0, 0) = 1,$$

et par conséquent

$$f'_x(0, y) = a(0, y); f'_x(0, 0) = a.$$

On trouve donc que

$$A(x) = \frac{a}{a+a} + \varepsilon_1(x),$$

où $\varepsilon_1(0) = 0$, et de la même manière

$$B(x) = \frac{a}{a+a} + \varepsilon_2(x),$$

$$\frac{f(x, 0)}{f(x, a(x))} = \frac{a}{a+a} + \varepsilon_3(x),$$

$$\frac{f(0, \alpha(x))}{f(x, \alpha(x))} = \frac{\alpha}{\alpha + a} + \varepsilon_4(x).$$

Si l'on a choisi le domaine Γ assez petit, on a à l'intérieur de l'intervalle (12)

$$\left| \left(\frac{f(x, 0)}{f(x, \alpha(x))} \right)^2 A(x) \right| + \left| \left(\frac{f(0, \alpha(x))}{f(x, \alpha(x))} \right)^2 B(x) \right| < k_1 < 1.$$

En outre,

$$\left| \frac{1}{C(x)} \right| < k_2,$$

$$\left| D(\xi, x) \right| + \frac{f(x, \alpha(x))}{x} \left| E(\xi, x) \right| < k_3.$$

Faisons la substitution

$$(13) \quad \psi(t) = t^{p+2} \mu(t),$$

par laquelle l'équation (11) se transforme en

$$(14) \quad \mu(f(x, \alpha(x))) - A_1(x) \mu(f(x, 0)) - B_1(x) \mu(f(0, \alpha(x))) = \frac{F'(x)}{C(x) [f(x, \alpha(x))]^{p+2}} - \\ - \int_0^x D_1(\xi, x) \mu(f(\xi, \alpha(x))) d\xi + \int_{f(x, 0)}^{f(x, \alpha(x))} E_1(\xi, x) \mu(\xi) d\xi,$$

où

$$|A_1(x)| + |B_1(x)| < k_1,$$

$$(15) \quad \left| \frac{F'(x)}{C(x) [f(x, \alpha(x))]^{p+2}} \right| < M K_1 k_2, \text{ [selon (7)]},$$

$$\left| D_1(\xi, x) \right| + \frac{f(x, \alpha(x))}{x} \left| E_1(\xi, x) \right| < k_3.$$

6. On peut résoudre l'équation (14) par des approximations successives en posant

$$\mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t) + \dots + \mu_n(t) + \dots,$$

où

$$\mu_1(f(x, \alpha(x))) - A_1(x) \mu_1(f(x, 0)) - B_1(x) \mu_1(f(0, \alpha(x))) = \frac{F'(x)}{C(x) [f(x, \alpha(x))]^{p+2}}, \\ \mu_2(f(x, \alpha(x))) - A_1(x) \mu_2(f(x, 0)) - B_1(x) \mu_2(f(0, \alpha(x))) = \\ = - \int_0^x D_1(\xi, x) \mu_1(f(\xi, \alpha(x))) d\xi + \int_{f(x, 0)}^{f(x, \alpha(x))} E_1(\xi, x) \mu_1(\xi) d\xi, \\ (16) \quad \text{--- --- --- --- ---}, \\ \mu_n(f(x, \alpha(x))) - A_1(x) \mu_n(f(x, 0)) - B_1(x) \mu_n(f(0, \alpha(x))) = \\ = - \int_0^x D_1(\xi, x) \mu_{n-1}(f(\xi, \alpha(x))) d\xi + \int_{f(x, 0)}^{f(x, \alpha(x))} E_1(\xi, x) \mu_{n-1}(\xi) d\xi, \\ \text{--- --- --- --- ---}.$$

Le second membre de la première équation est continu dans l'intervalle (12). Supposons que l'on peut obtenir de cette équation une solution $\mu_1(t)$ continue pour

$$(12') \quad t \leq f(x_M, \alpha(x_M)).$$

Ainsi on a, pour déterminer $\mu_2(t)$, une équation similaire dont le second membre est continu dans (12) etc.

Pour résoudre la première des équations (16), posons

$$\mu_1(t) = \mu_1^{(1)}(t) + \mu_1^{(2)}(t) + \dots + \mu_1^{(n)}(t) + \dots,$$

où

$$\begin{aligned} \mu_1^{(1)}(f(x, \alpha(x))) &= \frac{F'(x)}{C(x) [f(x, \alpha(x))]^{p+2}}, \\ \mu_1^{(2)}(f(x, \alpha(x))) &= A_1(x) \mu_1^{(1)}(f(x, 0)) + B_1(x) \mu_1^{(1)}(f(0, \alpha(x))), \\ &\text{---} \\ \mu_1^{(n)}(f(x, \alpha(x))) &= A_1(x) \mu_1^{(n-1)}(f(x, 0)) + B_1(x) \mu_1^{(n-1)}(f(0, \alpha(x))), \\ &\text{---} \end{aligned}$$

Toutes les $\mu_1^{(n)}(f(x, \alpha(x)))$ sont continues dans l'intervalle (12). Selon (15) on a

$$\begin{aligned} |\mu_1^{(1)}(f(x, \alpha(x)))| &< MK_1 k_2, \\ |\mu_1^{(2)}(f(x, \alpha(x)))| &< MK_1 k_2 k_1, \\ &\text{---} \\ |\mu_1^{(n)}(f(x, \alpha(x)))| &< MK_1 k_2 k_1^{n-1}, \\ &\text{---} \end{aligned}$$

Par conséquent $\mu_1(t)$ est une fonction continue dans (12') qui satisfait à l'inégalité

$$|\mu_1(f(x, \alpha(x)))| < \frac{MK_1 k_2}{1 - k_1}.$$

De la même manière on aura

$$\begin{aligned} |\mu_2(f(x, \alpha(x)))| &< \frac{MK_1 k_2 k_3 x}{(1 - k_1)^2}, \\ &\text{---} \\ |\mu_n(f(x, \alpha(x)))| &< \frac{MK_1 k_2 k_3^{n-1} x^{n-1}}{(1 - k_1)^n}, \\ &\text{---} \end{aligned}$$

Cette série est uniformément convergente dans (12') si l'on a choisi le domaine I assez petit. Alors on a d'après (13) obtenu une solution $\psi(t)$ continue dans I et remplissant une inégalité de la forme (9), où K_2 est indépendant de p .

7. Je vais maintenant démontrer l'existence de $\psi'(t)$. En différentiant l'équation (11), on obtient

$$\psi'(f(x, a(x))) - A_3(x) \psi'(f(x, 0)) - B_3(x) \psi'(f(0, a(x))) = C_3(x) - \int_0^x D_3(\xi, x) \psi'(f(\xi, a(x))) d\xi^1).$$

Ici A_3 , B_3 et D_3 ne dépendent que des fonctions f , g , et a . En outre, C_3 dépend de ψ , F' , et F'' . Elles sont toutes continues dans l'intervalle (12), et on a

$$\frac{f(x, 0)}{f(x, a(x))} |A_3(x)| + \frac{f(0, a(x))}{f(x, a(x))} |B_3(x)| < k_1,$$

$$\left| \frac{C_3(x)}{[f(x, a(x))]^{p+1}} \right| < MK_1 k_2,$$

$$|D_3(\xi, x)| < k_3.$$

On en obtient de la même manière qu'au paragraphe précédent une solution $\psi'(t)$ continue dans I , et remplissant une inégalité de la forme (9). Par un calcul facile on se convainc que cette fonction $\psi'(t)$ est réellement la dérivée de la fonction $\psi(t)$ que nous venons d'obtenir.

De la même manière on aura une fonction $\psi''(t)$ continue dans I , et remplissant (9)². Ainsi l'existence de la solution cherchée de l'équation (2) est démontrée. On prouve de la manière usuelle que cette solution est la seule possible.

8. Pour que la démonstration précédente soit valable, il faut donc que

$$(17) \quad a; a'_x; a'_y; a''_{xy}; a''_{y^2}; a'''_{xy^2};$$

$$(18) \quad g; g'_t; g''_{xt}; g''_{t^2}; g'''_{x^2t}; g'''_{xt^2}; g''''_{t^3}; g''''_{x^2t^2}; g''''_{xt^3}; g''''_{t^4};$$

$$(19) \quad f; f'_x; f'_y; f''_{x^2}; f''_{xy}; f''_{y^2}; f'''_{x^3}; f'''_{x^2y}; f'''_{xy^2}; f'''_{x^2y^2}$$

soient continues. Pour l'existence des dérivées (18) et (19) il faut que (17) aussi bien que a''_{x^2} , a'''_{y^3} et a''''_{y^4} soient continues³). Il en résulte finalement qu'il est nécessaire que

$$a; a'_x; a'_y; a''_{x^2}; a''_{xy}; a''_{y^2}; a'''_{xy^2}; a'''_{y^3}; a''''_{y^4}$$

soient continues.

9. La solution obtenue dans I peut se prolonger régulièrement.

Soient AB la courbe $y = g(x, t_M)$ qui est une caractéristique de l'équation (2), CD un arc de la courbe $y = a(x)$, AE et BD des parallèles aux axes et $FEDG$ une caractéristique. On calcule d'abord la solution existant dans $ACBDE$ et qui prend des valeurs données

¹) Il faut que f'''_{x^2y} soit continue.

²) Il faut que f'''_{x^3} , $f'''_{x^2y^2}$ soient continues.

³) Cf. par exemple LEVI: Reale Istituto Lombardo, Rendiconti, serie II, V. XLI p. 413.

des z , $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sur ACB et de z sur CD^1), ensuite la solution existant dans AEF et qui

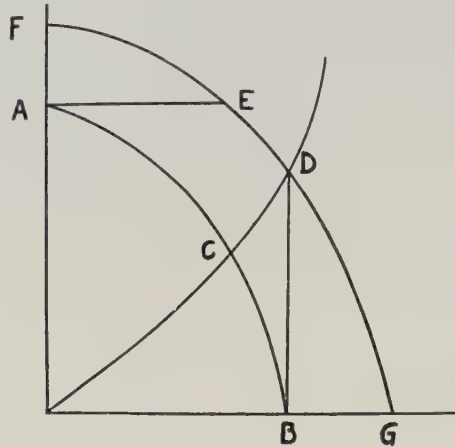


Fig. 8.

prend des valeurs données des z , $\frac{\partial z}{\partial y}$ sur AE et de z sur AF , et finalement on calcule la solution existant dans DBG qui prend des valeurs données des z , $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur BD et de z sur BG etc.

10. Si les trois courbes données qui se traversent encore dans le même point sont choisies arbitrairement, le problème paraît être beaucoup plus difficile. On aura à résoudre un système fonctionnel du type (10) à l'aide des approximations successives. Au moins sous les suppositions les plus simples pour les données aux limites, cela ne réussit pas, comme tout à l'heure, en sommant les valeurs absolues des termes en question. Il semble nécessaire de procéder autrement. Je reviendrai peut-être plus tard à cette question.

11. Je finis par l'observation suivante. Le problème le plus général de M. GOURSAT pour l'équation (1) ne consiste pas dans la recherche de la solution qui prend des valeurs données sur trois courbes se traversant en *un* point, mais le cas le plus général c'est que les courbes se coupent en *trois* points. En traitant un cas spécial, je ferai voir que ce dernier problème, selon toute probabilité, est justement posé.

Je cherche donc la solution de l'équation

$$(20) \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - a \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad (a \text{ est un constant } > 0),$$

qui est nulle sur les caractéristiques

$$x = k > 0; y = 0.$$

¹⁾ Cf. la remarque ²⁾ du § 4.

et qui, sur la ligne

$$y = ax, \quad a > 0,$$

se réduit à une fonction donnée $f(x)$. Cette fonction est continue ainsi que ses dérivées jusqu'au troisième ordre dans le domaine I' qui est limité par les lignes droites

$$x = 0; \quad y = l - ak; \quad y + ax = l; \quad x = \frac{l}{a}; \quad y = -ak; \quad y = -ax;$$

où

$$l > k. \quad (\text{Cf. fig. 9.})$$

Après une substitution convenable on peut supposer

$$(21) \quad a + a = 1.$$

On comprend que le domaine I' renferme le triangle dont les sommets sont les points d'intersection des lignes données.

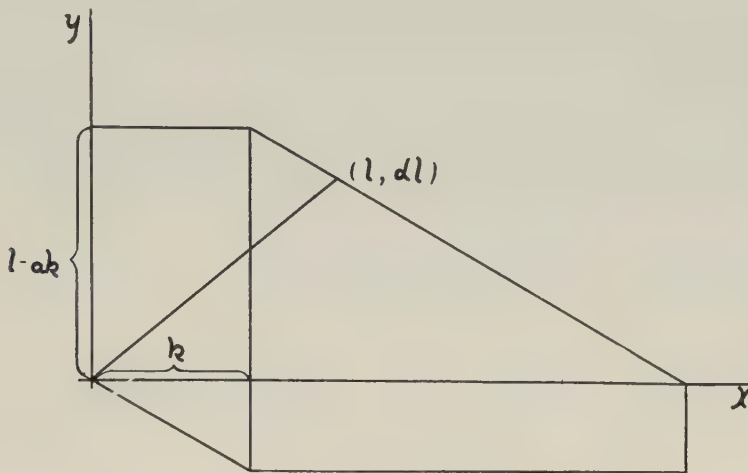


Fig. 9.

Si la fonction φ est continue ainsi que ses dérivées jusqu'au troisième ordre,

$$(22) \quad z = \varphi(y + ax) - \varphi(y + ak) - \varphi(ax) + \varphi(ak)$$

est une solution régulière de (20) qui est nulle pour $x = k$ et pour $y = 0$. Il s'agit donc d'adapter la fonction φ à la condition

$$\varphi[(a + a)x] - \varphi(ax + ak) - \varphi(ax) + \varphi(ak) = f(x)$$

qui selon (6) peut s'écrire

$$(23) \quad \varphi(x) = \varphi(ax + ak) + \varphi(ax) - \varphi(ak) + f(x).$$

Je différencie cette équation deux fois par rapport à x

$$\varphi''(x) = a^2 \varphi''(ax + ak) + a^2 \varphi''(ax) + f''(x).$$

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(x) &= f''(x), \\ \psi^{(2)}(x) &= a^2 \psi^{(1)}(ax + ak) + a^2 \psi^{(1)}(ax), \\ &\text{--- -- -- -- --} \\ \psi^{(n)}(x) &= a^2 \psi^{(n-1)}(ax + ak) + a^2 \psi^{(n-1)}(ax), \\ &\text{--- -- -- -- --} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &< ax + ak \leq a^l + ak < a^l + al = l, \\ 0 &< ax < a^l < l. \end{aligned}$$

$$|f''(x)| < M,$$

$$\begin{aligned} |\psi^{(2)}(x)| &< M(a^2 + a^2), \\ |\psi^{(3)}(x)| &< M(a^2 + a^2)^2, \\ &\dots, \\ |\psi^{(n)}(x)| &< M(a^2 + a^2)^{n-1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\alpha^2 + a^2 < 1,$$

$$\int_b^x \psi(t) \, dt = \alpha \int_b^{ax+ak} \psi(t) \, dt + a \int_{ab}^{ax} \psi(t) \, dt + f'(x) - f'(k),$$

$$\int_k^x d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt = \int_k^{ax+ak} d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt + \int_{ak}^{ax} d\xi \int_{ak}^{\xi} \psi(t) dt + f(x) - (x-k) f'(k).$$

Nous transcrivons

$$(27) \quad \int_k^x d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt = \int_k^{ax+ak} d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt + \int_{ak}^{ax} d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt - \int_k^{ak} d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt + f(x) + \\ + \int_{ak}^{ax} d\xi \int_{ak}^{\xi} \psi(t) dt - \int_k^{ax} d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt + \int_k^{ak} d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt - (x-k) f'(k).$$

La dernière ligne peut s'écrire

$$(x-k) \left[a \int_{ak}^k \psi(t) dt - f'(k) \right].$$

L'équation (27) est satisfaite pour toutes les valeurs des x dans (26). Pour $x=0$ nous avons, en observant que $f(0)=0$,

$$a \int_{ak}^k \psi(t) dt - f'(k) = 0,$$

d'où

$$\int_k^x d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt = \int_k^{ax+ak} d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt + \int_{ak}^{ax} d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt - \int_k^{ak} d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt + f(x).$$

Si l'on pose

$$\varphi(x) = \int_k^x d\xi \int_k^{\xi} \psi(t) dt,$$

la fonction $\varphi(x)$ satisfait donc à l'équation (23). Elle est, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre, continue dans l'intervalle (26). La solution (22) est donc régulière dans le domaine Γ .

